

Số 1, tháng 1 năm 2017

SPUTNIK NEWSLETTER

Tạp chí điện tử miễn phí về toán học,
giáo dục, các khoa học, và các tin tức Sputnik

Trong số này:

Các bài toán hình học tổ hợp tại IMO	2
Romeo đi tìm công chúa (21 câu đố lô-gic và chiến lược) . .	29
Các tiêu chí cho sách giáo khoa về toán	48
Học tiếng Anh cùng “Hoàng tử bé”	52
Một vài hình ảnh về các hoạt động của Sputnik	65

Kể từ Số 2, Sputnik Newsletter nhận đăng chọn lọc các bài viết về các chủ đề: toán học, STEM, quan điểm giáo dục, giới thiệu sách, v.v. Tác giả của các bài được đăng sẽ được tặng các bộ sách Sputnik.

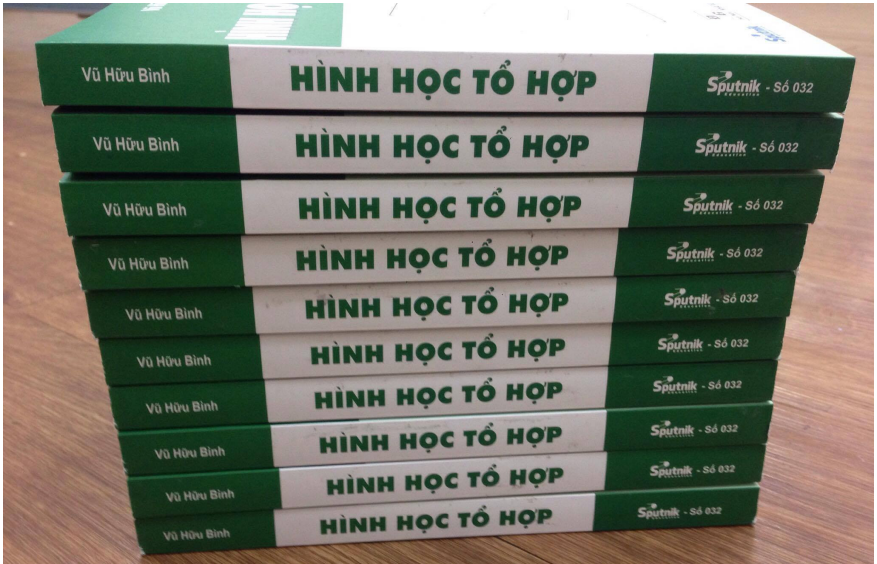
Liên hệ bài vở: lbphuong@sputnik.vn, shop@sputnikedu.com

Hình học tổ hợp tại IMO

Quyển sách “Hình học tổ hợp” (Tủ sách Sputnik, số 032), tác giả là Nhà giáo Nhân dân Vũ Hữu Bình, mà các bạn đọc mong đợi bao lâu, đã được in ra đúng vào những ngày cuối năm 2016. Đây thực sự là một quyển sách rất bổ ích cho các học sinh THCS và THPT muốn phát triển thêm năng khiếu về môn toán, và được rất nhiều bạn đọc quan tâm. Sputnik kỳ vọng sẽ bán hết 3000 cuốn sách này trong vòng 4 tháng đầu năm 2017.

Các bài hình học tổ hợp thường hay xuất hiện trong các kỳ thi olympic, đặc biệt là IMO (International Mathematical Olympiad). Và phần lớn các bài này là “sát thủ” đối với đoàn học sinh Việt Nam: nhiều bài cả đoàn không ai làm được. Nhiều khi không phải vì chúng quá khó, mà chẳng qua vì chúng “lạ” và học sinh Việt Nam chưa được dạy cách tiếp cận các bài toán lạ để mà “trăm trận trăm thắng”.

GS Nguyễn Tiên Dũng gần đây có viết một bài hướng dẫn các bạn học sinh về việc tiếp cận các bài toán lạ như thế nào, qua ví dụ 5 bài hình học tổ hợp IMO từ 2013 đến 2016. Trong đó 4 bài đầu tiên được đưa vào thành phần phụ lục của sách “Hình học tổ hợp” của thầy Vũ Hữu Bình. Bài thứ 5 vì quá phức tạp, hướng dẫn cách giải quá dài nên không cho vào sách.



Một chồng sách Hình Học Tổ Hợp (Tủ sách Sputnik, số 032).

Ở đây, Sputnik xin giới thiệu đầy đủ cả 5 bài, bao gồm đề bài và hướng dẫn giải. Bạn đọc nên giành nhiều thời gian cố gắng tự giải những bài toán này trước khi xem lời giải ở phía sau.

Đề bài

Bài tập 1 (*IMO 2015*). Gọi V là một tập hữu hạn các điểm trên mặt phẳng. Ta nói rằng V là *cân bằng* nếu với hai điểm phân biệt bất kỳ $A, B \in V$ tồn tại một điểm thứ ba $C \in V$ sao cho $CA = CB$. Ta nói rằng V là *không có tâm* nếu như không tồn tại một bộ bốn điểm phân biệt $A, B, C, P \in V$ sao cho $PA = PB = PC$.

i) Chứng minh rằng với $n \geq 3$ tồn tại một tập hợp điểm V cân

bằng có đúng n điểm.

ii) Với những $n \geq 3$ nào thì tồn tại tập hợp V cân bằng và không có tâm với đúng n điểm?

Bài tập 2 (IMO 2013). Tìm số N nhỏ nhất thỏa mãn tính chất sau: Lấy 2013 điểm tô trắng và 2014 điểm tô đen bất kỳ trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Khi đó tồn tại N đường thẳng trên mặt phẳng không đi qua điểm nào trong số các điểm trên và chia mặt phẳng thành các miền sao cho các điểm trong cùng một miền thì phải cùng màu.

Bài tập 3 (IMO 2014). Giả sử có n đường thẳng trên mặt phẳng sao cho không có 2 đường nào song song và không có 3 đường nào đồng quy. Chứng minh rằng có thể tô ít nhất \sqrt{n} đường màu xanh sao cho không có miền bị chặn nào có biên toàn là màu xanh.

Bài tập 4 (Bài toán con ếch IMO 2016). Có N đoạn thẳng đôi một giao nhau sao cho không có ba đoạn nào đồng quy. Như vậy, trên mỗi đoạn có $N - 1$ điểm nút cắt và 2 nút đầu đuôi. Thầy Minh (Nguyễn Khắc Minh) chơi trò như sau: Đặt N con ếch vào N điểm nút ngoài cùng (nút đầu đuôi) của N đoạn thẳng đó, mỗi đoạn đặt một con rồi thầy vỗ tay N lần. Mỗi lần vỗ tay thì tất cả con ếch đồng thời nhảy, con nào cũng nhảy trên đoạn thẳng của con đó theo hướng cố định từ điểm xuất phát đến đầu bên kia từ nút đang đứng sang nút tiếp theo. Chứng minh rằng

i) Nếu N lẻ thì có thể đặt ếch sao cho khi nhảy như vậy không có lần nào mà có 2 con ếch cùng nhảy vào 1 nút.

ii) Nếu N chẵn thì dù đặt ếch kiểu gì cũng có lúc có 2 con ếch cùng nhảy vào 1 nút ở một lần vỗ tay nào đó.

Bài tập 5 (IMO 2013). Xét $n + 1$ điểm xếp đều nhau ($n > 1$) trên vòng tròn được đánh số $0, 1, 2, \dots, N$ theo một thứ tự vòng tròn nào đó. Hai cách đánh số được coi là như nhau nếu có thể xoay vòng tròn để di chuyển cách đánh số này sang thành cách đánh số khác. Một cách đánh số như vậy gọi là *đánh số đẹp* (hay *xếp đẹp*) nếu với mọi $0 \leq a < b < c < d \leq n$ sao cho $a + d = b + c$ thì đoạn thẳng nối (điểm đánh số) a với d không cắt đoạn thẳng nối b với c . Gọi $M(n)$ là số tất cả các cách đánh số đẹp, $N(n)$ là số tất cả các cặp số nguyên dương có xếp thứ tự (k, l) nguyên tố cùng nhau sao cho $k + l \leq n$. Chứng minh rằng $M(n) = N(n) + 1$.

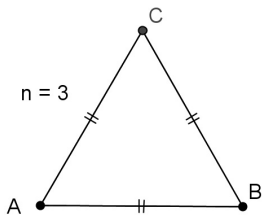
Hướng dẫn tìm lời giải

Bài tập 1. Trước khi xét n tùy ý, ta xét n từ nhỏ đến lớn rồi từ đó tổng quát lên và phán đoán quy luật.

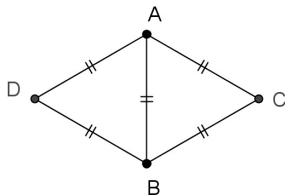
$n = 3$. Gọi A, B, C là ba điểm phân biệt của V . Giả sử V cân bằng. Khi đó C phải là điểm cân bằng giữa A và B , tức là $CA = CB$ vì không còn điểm nào khác trong V . Tương tự như vậy, A phải là điểm cân bằng của cặp điểm (B, C) , tức là $AB = AC$. Suy ra $AB = BC = CA$, tức $\triangle ABC$ là tam giác đều. Ngược lại nếu tam giác ABC là tam giác đều thì $V = \{A, B, C\}$ cân bằng và không có tâm (Hình 1).

$n = 4$. Tương tự như trường hợp $n = 3$, trong trường hợp $n = 4$ ta có thể sử dụng hai tam giác đều ghép thành hình quả trám để xây dựng một tập hợp cân bằng (Hình 2).

Chú ý rằng trong ví dụ này thì V có tâm: $BA = BC = BD$ và $DA = DB = DC$. Câu hỏi là có thể xây dựng ví dụ khác mà không



Hình 1



Hình 2

có tâm được không?

Sau khi thử vài lần không được, ta đặt giả thuyết rằng điều đó không thể được. Tức là, nếu tập hợp gồm 4 điểm là cân bằng thì nó có tâm.

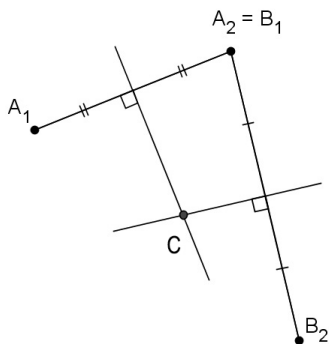
4 điểm lập thành 6 cặp điểm (không tính thứ tự trong các cặp). Mỗi cặp điểm có (ít nhất) một điểm cân bằng của chúng.

Vì số cặp điểm là 6 mà số điểm là 4 nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một điểm là điểm cân bằng của ít nhất hai cặp điểm khác nhau. Gọi hai cặp điểm đó là $(A_1, A_2), (B_1, B_2)$ và điểm cân bằng chung là C . Nếu tất cả các điểm A_1, A_2, B_1, B_2 là khác nhau thì V có ít nhất 5 điểm phân biệt C, A_1, A_2, B_1, B_2 , vô lý. Bởi vậy hai cặp (A_1, A_2) và (B_1, B_2) phải có chung 1 điểm, không chung cả 2 vì nếu vậy thì 2 cặp trùng nhau. Giả sử chẳng hạn $A_2 = B_1$ (Hình 3).

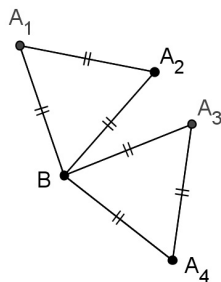
Khi đó, $CA_1 = CA_2 (= CB_1) = CB_2$. Do đó, C là tâm điểm của bộ 3 điểm (A_1, A_2, B_2) , tức là V có tâm.

$n = 5$. Ta có thể mở rộng ý tưởng từ các trường hợp $n = 3, n = 4$ lên trường hợp $n = 5$.

Nếu ta chấp nhận có tâm điểm như khi $n = 4$ thì ta có thể tạo hai tam giác đều có cùng một đỉnh, không dính vào nhau và tách nhau



Hình 3

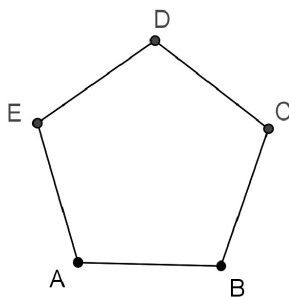


Hình 4

ra (Hình 4). Khi đó ta sẽ được một tập hợp cân bằng (và có tâm) với 5 điểm.

Nếu ta không muốn tập có tâm thì có thể thử mở rộng trường hợp tam giác đều khi $n = 3$ lên thành đa giác đều khi $n > 3$.

Chẳng hạn, trong ngũ giác đều $ABCDE$ (Hình 5) thì hai đỉnh A và B của cạnh AB cách đều điểm D còn hai đỉnh A và C của đường chéo AC cách đều điểm B . Tương tự như vậy cho các cạnh và đường chéo khác, và do đó bộ đỉnh $V = \{A, B, C, D, E\}$ của một ngũ giác đều là một tập hợp cân bằng và không có tâm.



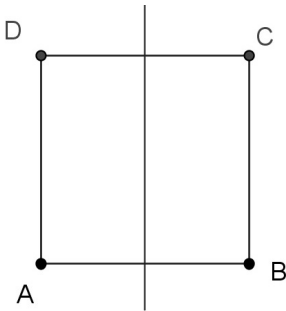
Hình 5

$n > 5$. Dựa trên các suy luận có trước, ta đưa ra giả thuyết sau:

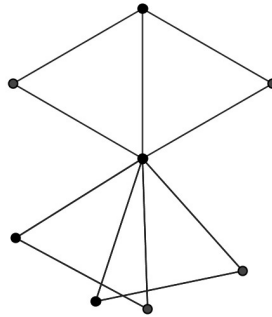
a) Nếu n lẻ thì tồn tại cặp n điểm cân bằng và không có tâm điểm.

b) Nếu n chẵn thì cũng tồn tại tập n điểm cân bằng nhưng các tập như vậy đều có tâm điểm.

Chứng minh. a) Thật vậy, chỉ cần sử dụng n -giác đều khi n lẻ. Chú ý rằng khi n chẵn thì tập các đỉnh của n giác đều không phải là tập cân bằng. Ví dụ như khi $n = 4$ thì đường trung trực của cạnh AB của hình vuông $ABCD$ không chứa đỉnh nào cả (Hình 6).



Hình 6



Hình 7

b) Khi n chẵn và $n \geq 4$, ta có thể mở rộng ví dụ từ trường hợp $n = 4$ và thêm vào đó các tam giác đều có chung một đỉnh. Trên Hình 7 minh họa ví dụ với $n = 8$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng:

Khi $n = 2m \geq 4$ là số chẵn thì mọi tập V cân bằng với n điểm đều chứa tâm điểm, bằng cách tương tự như khi $n = 4$.

Thật vậy, khi V có $n = 2m$ điểm thì chúng lập thành:

$$C_n^2 = \frac{2m(2m-1)}{2} = 2m^2 - m \quad \text{cặp điểm (không xếp thứ tự).}$$

Mỗi cặp điểm có ít nhất một điểm cân bằng (cách đều) trong số các điểm của V và vì V có $2m$ điểm nên sẽ có điểm $P \in V$ là điểm

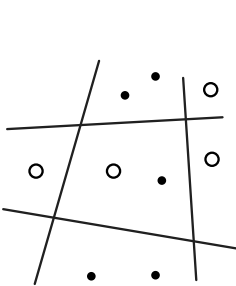
cân bằng của ít nhất $\frac{2m^2 - m}{2m} = m - \frac{1}{2}$ cặp điểm khác nhau, vì $\frac{1}{2} < 1$ nên thực ra P phải là điểm cân bằng của (ít nhất) m cặp điểm khác nhau.

Nếu tất cả các điểm trong tất cả m cặp đó đều khác nhau thì tổng cộng có $2m = n$ điểm phân biệt, thêm điểm P thành $n + 1$ điểm phân biệt trong V , vô lý. Như vậy có 2 cặp điểm trong số đó có chung một điểm, ví dụ như cặp (A, B) và cặp (B, C) . Khi đó, ta có $PA = PB = PC$, tức là P là tâm điểm của bộ điểm (A, B, C) .

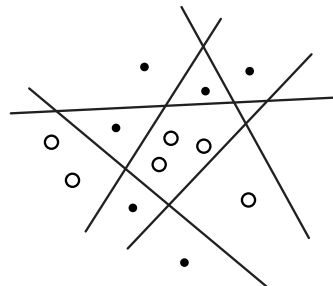
Bài tập 2

Vẽ vài ví dụ (với ít điểm) để hiểu yêu cầu của bài toán trước khi bắt tay vào giải (Hình 8).

Yêu cầu của bài toán là tìm số N nhỏ nhất sao cho trong mọi trường hợp thì có thể chia tách các màu mà chỉ dùng không quá N đường.



Như thế này là không được
vì có miền ở giữa có
cả điểm trắng lẫn điểm đen



Chia như thế này là được,
nhưng không tối ưu
vì có cách dùng ít đường hơn

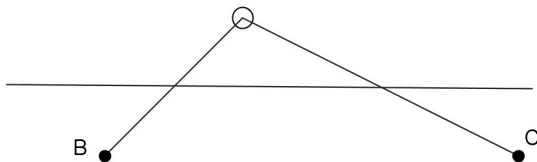
Hình 8

Gọi số điểm trắng là n thì số điểm đen là $n + 1$.

Bài toán yêu cầu giải với $n = 2013$.

Vì n là số lớn nên ta thử tìm cách quy nạp theo n , đầu tiên giải bài toán cho n nhỏ và tổng quát dần lên.

Với $n = 1$, ta có 1 điểm trắng và 2 điểm đen.

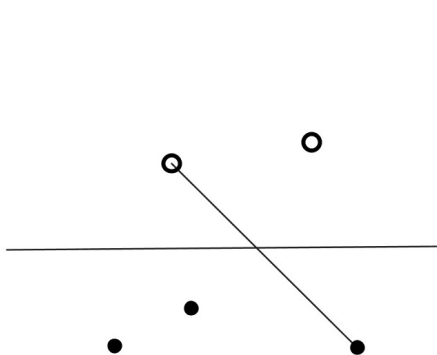


Hình 9

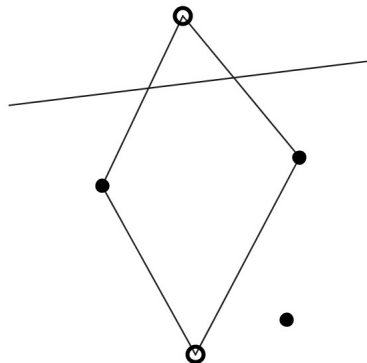
Để dàng dựng đường thẳng tách điểm trắng khỏi 2 điểm đen. Ví dụ như là đường đi qua trung điểm các đoạn thẳng nối điểm trắng với điểm đen (Hình 9).

Như vậy $N(1) = 1$ chỉ cần 1 đường thẳng.

Với $n = 2$, ta có 2 điểm trắng và 3 điểm đen.



Hình 10



Hình 11

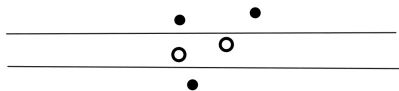
Có những khi chỉ cần một đường thẳng là đủ để tách các điểm trắng khỏi các điểm đen. Chú ý rằng các đường như thế sẽ phải cắt mọi đoạn thẳng nối điểm trắng với điểm đen (Hình 10).

Nếu có 2 điểm trắng và 2 điểm đen tạo thành 4 đỉnh xen kẽ của một tứ giác lồi (Hình 11) thì không thể có đường thẳng nào cắt cả 4 cạnh của tứ giác (các cạnh đó nối điểm trắng với điểm đen). Như vậy, trong những ví dụ như thế thì một đường là không đủ, cần ít nhất hai đường?

Hai đường có luôn đủ không?

Sau khi tiếp tục quan sát, ta đưa ra một chiến lược sau: Nếu lấy 2 đường thẳng tạo thành một dải rất hẹp chứa 2 điểm trắng thì dải đó không chứa thêm điểm nào vì các điểm không thẳng hàng với nhau và như vậy 2 đường thẳng này là đủ để tách 2 điểm trắng khỏi các điểm đen (bất kể là có bao nhiêu điểm đen) (Hình 12).

Như vậy với $n = 2$ ta có $N(2) = 2$.



Hình 12

Từ $N(1) = 1, N(2) = 2$ ta tạm thiết lập một giả thuyết quy nạp: $N(n) = n, \forall n$. Nếu giả thuyết này là đúng thì đáp số của bài toán là $N(2013) = 2013$.

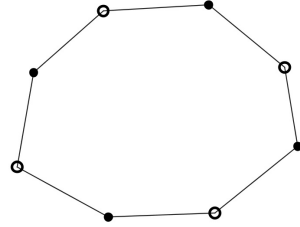
Với $n \geq 3$, ta có n điểm trắng và $n + 1$ điểm đen.

Ta muốn chứng minh $N(n) \geq n$ (tức là tồn tại cấu hình cần đến ít nhất n đường) và $N(n) \leq n$ (tức là luôn có cách làm với n đường).

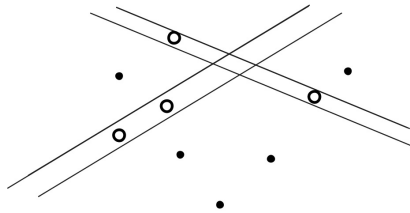
Để xây dựng cấu hình cần ít nhất n đường ta có thể xây dựng tương tự như khi $n = 2$. Lấy các điểm sao cho chúng là đỉnh của một đa giác lồi với n đỉnh trắng và n đỉnh đen xen kẽ nhau (và thừa thêm một điểm đen ở đâu đó) (Hình 13). Nếu các đường muốn tách các

điểm trắng khỏi các điểm đen thì chúng phải cắt tất cả các cạnh của đa giác này. Vì có $2n$ cạnh và mỗi đường chỉ cắt được (nhiều nhất là) hai cạnh nên cần ít nhất là $\frac{2n}{2} = n$ đường.

Bây giờ ta muốn chỉ ra cách làm với n đường. Trong trường hợp $n = 2m$ là số chẵn, ta có thể làm tương tự như khi $n = 2$. Tức là ta chia các điểm trắng thành $m = \frac{n}{2}$ cặp điểm (một cách tùy ý) rồi với mỗi cặp điểm trắng này ta kẻ hai đường tạo thành một dải hẹp chứa hai điểm trắng này và không chứa thêm điểm nào khác.



Hình 13



Hình 14

Bằng cách đó ta có $m \times 2 = 2m = n$ đường thẳng tách toàn bộ các điểm trắng ra khỏi các điểm đen (Hình 14).

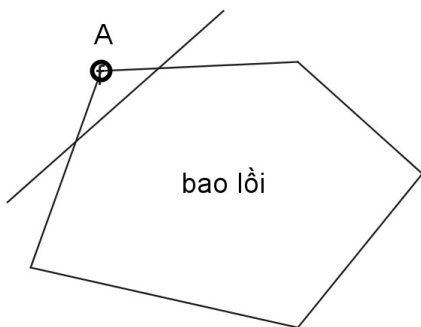
Khi $n = 2m + 1$ là số lẻ, ta cũng thử làm như trên và chia các điểm trắng thành từng cặp được $2m$ cặp và một điểm lẻ. Nếu có điểm lẻ nào mà có thể tách được chỉ bằng một đường thì tốt, vì $2m$ điểm còn lại có thể làm như trên.

Để xét xem có điểm trắng nào mà tách được ra khỏi các điểm khác bởi một đường hay không, ta có thể xét bao lồi của toàn bộ các điểm. Bao lồi đó sẽ là một đa giác.

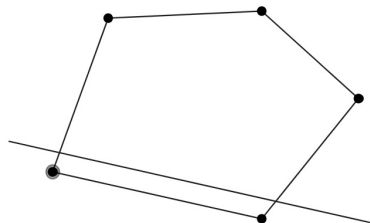
a) Đa giác đó có đỉnh màu trắng (Hình 15). Khi đó có thể lấy đỉnh đó làm điểm trắng lẻ và kẻ một đường thẳng tách nó ra khỏi tất cả các điểm còn lại.

b) Tất cả các đỉnh của bao lồi đều màu đen (Hình 16).

Khi đó ta tách được 2 đỉnh đen sát nhau bằng 1 đường nằm sát cạnh tương ứng rồi chia $(n + 1) - 2 = 2m$ đỉnh đen còn lại thành m cặp và dựng m dải nhỏ để tách chúng ra (như là lúc trước làm với các điểm trắng). Ta dùng tổng cộng $2m + 1 = n$ đường và tách được toàn bộ các điểm đen khỏi điểm trắng.



Hình 15



Hình 16

Bài tập 3.

Đoàn học sinh thi IMO của Việt Nam năm 2014 không có bạn nào giải được bài này nên có thể coi đây là bài toán khó. Tuy nhiên, nếu ta biết suy luận đúng hướng thì sẽ tìm được lời giải khá ngắn gọn, chẳng hề phức tạp.

Con số \sqrt{n} trong bài có thể gây hoang mang vì khi có n đoạn thẳng cắt nhau thì số điểm cắt, số đoạn cắt, số miền sẽ là những đa thức theo n chứ không có dạng căn thức. Sự hoang mang có ảnh hưởng xấu đến tâm lý khiến việc tìm lời giải trở nên khó khăn hơn.

Bỏ qua sự hoang mang đó, ta thử làm một thuật toán “ngây thơ” để giải quyết vấn đề tô màu này xem nó có thể gặp bế tắc ở đâu. Thuật toán ngây thơ đó là: Đầu tiên ta tô một đường bất kỳ màu xanh. Sau đó nếu còn tô thêm đường nào đó màu xanh sao cho không có miền nào có biên toàn màu xanh thì ta còn tô tiếp đường đó, còn đến lúc không còn tô được thêm nữa thì dừng lại. Gọi số đường đã tô xanh vào thời điểm dừng lại là k . Nếu ta chứng minh được $k^2 \geq n$ thì thuật toán của ta là tốt và ta giải quyết xong bài toán.

Như vậy sử dụng phương pháp phản chứng, ta muốn đưa bài toán ban đầu về bài toán sau: Giả sử đã tô được k đường xanh và $k^2 < n$. Khi đó còn tô thêm được ít nhất một đường nữa. Để chứng minh điều đó chỉ cần chứng minh rằng số đường cấm không vượt quá $k^2 - k = k(k - 1)$. Đường cấm là đường chưa được tô xanh và nếu tô nó màu xanh thì sẽ có miền bị chặn có biên toàn màu xanh.

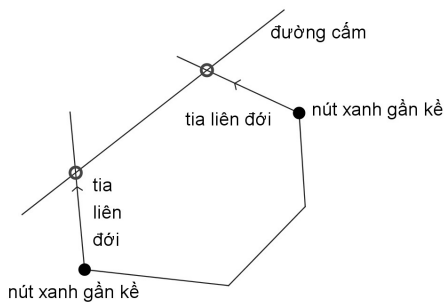
Ta lại quan sát điều sau: Số điểm nút xanh = $\frac{k(k - 1)}{2}$ (điểm nút xanh = điểm giao nhau của hai đường xanh). Con số này bằng $\frac{1}{2}$ chặn trên của số đường cấm mà ta muốn chứng minh. Từ đây nảy ra ý tưởng: Nếu chẳng hạn mỗi đường cấm phải được gắn với một điểm nút xanh và trong cách gắn đó mỗi điểm nút xanh được gắn với không quá 2 đường cấm thì số đường cấm không vượt quá hai lần số điểm nút xanh, tức là không quá $2 \times \frac{k(k - 1)}{2} = k(k - 1)$ đường cấm.

Làm sao để liên hệ đường cấm với điểm nút xanh? Một đường

cắm tạo ra miền bị chặn có biên toàn xanh và có một khúc biên chính là đường cắm đó. Trên miền đó có hai đỉnh nút xanh gần kề nhất với đường cắm. Ta sẽ gọi hai tia cạnh xanh xuất phát từ hai đỉnh đó về phía hai đỉnh trên đường cắm là hai tia liên đới (Hình 17).

Chú ý rằng hai đỉnh xanh gần liền kề có thể trùng nhau thành một đỉnh nhưng hai tia liên đới không trùng nhau.

Như vậy mỗi đường cắm ứng với ít nhất hai tia liên đới (có thể nhiều hơn hai nếu tạo ra nhiều miền bị chặn có biên xanh).



Hình 17

Ngược lại từ mỗi đỉnh nút xanh chỉ có bốn tia xanh xuất phát tức là tạo ra nhiều nhất bốn tia liên đới cho tất cả các đường cắm. (Để thấy một tia không thể là tia liên đới của hai đường cắm cùng lúc).

Như vậy:

Số tia liên đới \leq số nút xanh $\times 4$ và số tia liên đới \geq số đường cắm $\times 2$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra, số đường cắm} &\leq \frac{\text{số nút xanh} \times 4}{2} \\ &= 2 \times \text{số nút xanh} \\ &= k(k+1) = k^2 - k. \end{aligned}$$

Vậy nếu $n > k^2$ thì trong số $n - k > k^2 - k$ đường chưa tô có ít nhất 1 đường không bị cắm và ta có thể tô xanh đường đó.

Ghi chú. Quan hệ giữa đường cắm và nút xanh không phải là kiểu

“ $2 - 1$ ” như ý tưởng ban đầu mà là quan hệ kiểu “ $4 - 2$ ” nhưng vẫn cho cùng bất đẳng thức về số đường cắt).

Bài tập 4.

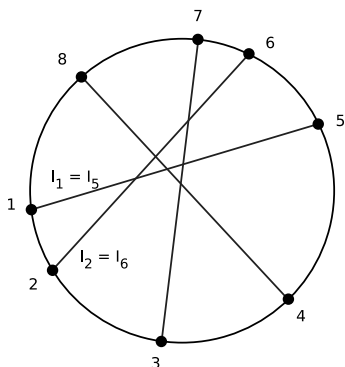
Bài này có thể coi thuộc loại khó, đoàn học sinh đi thi IMO của Việt Nam năm đó không ai giải được. Cái khó chủ yếu nằm ở chỗ nó lạ, không theo khuôn mẫu đã được học để giải rập khuôn chứ thực ra nó không phức tạp lắm. Ta có thể suy luận như sau:

Bước 1. Tìm cách đánh số các đoạn thẳng để tạo cái gì đó mà bầu víu vào. Phương pháp “thông tin phụ” này cũng tương tự phương pháp vẽ thêm hình phụ để giải quyết bài toán hình học thông thường.

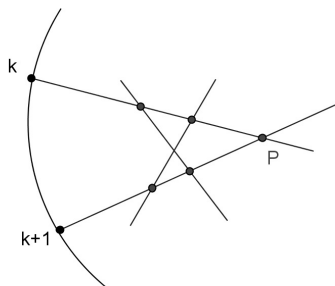
Để đánh số ta có thể hình dung một vòng tròn thật to chứa tất cả các đoạn thẳng bên trong rồi kéo dài các đoạn thẳng sao cho các đỉnh của chúng nằm trên vòng tròn (Hình 18). Điều này tất nhiên không làm thay đổi trò chơi. Sau khi làm như vậy ta có $2N$ điểm nút trên vòng tròn, đánh số thứ tự xoay vòng (ngược chiều kim đồng hồ) 1 đến $2N$. Chú ý rằng với mọi k thì điểm k và $N + k$ là hai điểm của cùng một đoạn thẳng. Điều này suy ra từ tính chất tất cả các đoạn đều cắt nhau.

Bước 2. Nhận xét tiếp theo và là một quan sát quan trọng cho bài toán: Nếu có 2 con ếch đặt liền nhau ở các vị trí k và $k + 1 \pmod{2N}$ lúc ban đầu thì thể nào chúng cũng cùng nhảy vào 1 điểm nút (chính là điểm cắt nhau của đoạn I_k và đoạn I_{k+1} , với I_k là kí hiệu đoạn thẳng có một đầu là điểm k) sau một số lần vỗ tay nào đó.

Thật vậy, tất cả các đoạn khác nếu cắt đoạn con kP (P là giao của I_k và I_{k+1}) thì cũng cắt đoạn con $(k + 1)P$ và ngược lại và do đó số bước nhảy từ k đến P cũng bằng số bước nhảy từ $k + 1$ đến P



Hình 18



Hình 19

(Hình 19).

Bước 3. Thầy Minh muốn đặt ếch sao cho chúng không nhảy vào nhau thì phải làm thế nào? Theo Bước 2 nếu đặt ếch, chẳng hạn, ở điểm 1 (không mất tính tổng quát ta có thể giả sử như vậy) thì không được đặt ở điểm 2 và do đó phải đặt ở điểm $2 + N$ cho đoạn thẳng $I_2 = I_{2+N}$. Khi có ếch đặt ở điểm $2 + N$ thì không được đặt ở điểm $3 + N$ kế bên mà phải đặt ếch ở điểm 3 cho đoạn thẳng đó và cứ thế. Suy ra phải đặt theo kiểu “đặt 1 cách 1”:

$$1 - 3 - 5 - 7 - \dots$$

Nếu $N = 2m$ là số chẵn thì cứ tiếp tục như vậy ta có ếch được đặt tại các điểm

$$1 - 3 - 5 - \dots - (2m - 1) - (2m + 1) = N + 1 - \dots$$

Thế nhưng điều đó có nghĩa là ếch được đặt ở cả hai đầu 1 và $N + 1$ của đoạn thẳng I_1 , mâu thuẫn với đề bài.

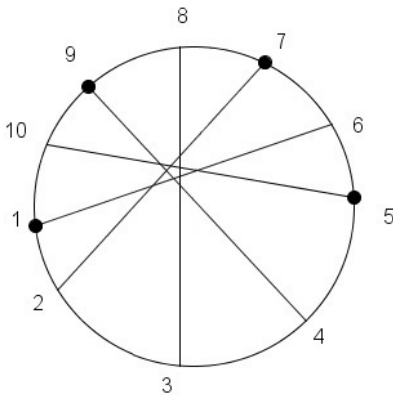
Như vậy, ta đã chứng minh được rằng khi N chẵn thì dù đặt ếch

theo kiểu gì cũng có 2 con nhảy vào nhau (vào cùng nút) tại thời điểm nào đó.

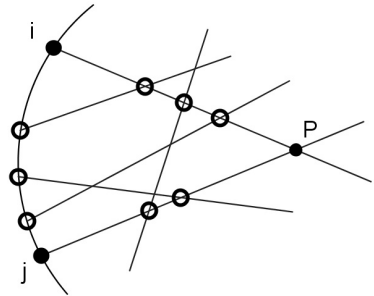
Bước 4. $N = 2m + 1$ là số lẻ thì sao. Khi đó thì có thể xếp ếch theo kiểu “đặt 1 cách 1” (Hình 20) sao cho trên mỗi đoạn thẳng I_k có đúng một con ếch.

Để chứng minh rằng không có hai con nào nhảy vào cùng một nút cùng lúc ta có thể sử dụng tính chẵn lẻ.

Chẳng hạn có hai con ếch được đặt tại i và $j \pmod{2N}$ và điểm nút P là giao của I_i với I_j (Hình 21).



Hình 20



Hình 21

Chú ý rằng trên cung tròn ở giữa i và j có một số lẻ các điểm nút. Vì một đoạn thẳng cắt “hình mẫu bánh ijP ” tại đúng 2 điểm (nếu cắt) hoặc 0 điểm (nếu không cắt) nên tổng số các nút trên biên, trừ ra i, j, P là số chẵn.

Số các nút trên cung ij là lẻ nên tổng số các nút trên iP và jP cũng lẻ.

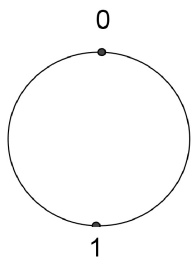
Suy ra tính chẵn lẻ của số bước từ i đến P và số bước từ j đến P là khác nhau, nếu một số là chẵn thì số kia là lẻ và ngược lại.

Như vậy con ếch từ i sẽ không thể gặp con ếch từ j tại điểm P vì số bước nhảy để chúng đến P là khác nhau về tính chẵn lẻ, không thể bằng nhau.

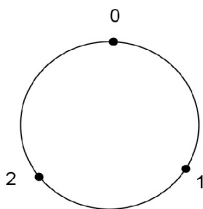
Vậy ta đã chứng minh xong là khi N lẻ thì thầy Minh có cách xếp ếch sao cho không có hai con nào nhảy vào cùng một chỗ tại một bước nào đó.

Bài tập 5. Tương tự như với các bài toán khác có chứa n bất kỳ ta sẽ thử tìm cách quy nạp theo n . Đầu tiên ta xét các trường hợp n nhỏ rồi quan sát để mà phán đoán các quy luật (đưa ra các giả thuyết) rồi tìm cách chứng minh các quy luật đó rồi áp dụng vào bài toán.

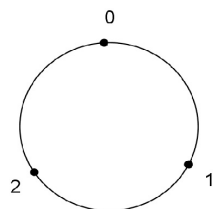
$n = 1$. Chỉ có 1 cách duy nhất "2 người ngồi đối diện nhau" $M(1) = 1, N(1) = 0$ vì tất nhiên không có 2 số nguyên dương nào có tổng nhỏ hơn hoặc bằng 1. Đẳng thức $M(1) = N(1) + 1$ đúng cho trường hợp này.



Hình 22



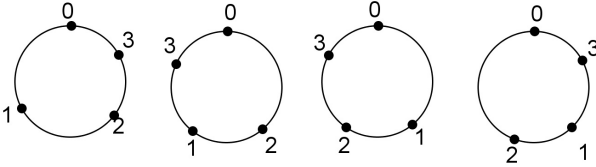
và



Hình 23

$n = 2$. Có 2 cách, $M(2) = 2$, còn $N(2) = 1$ vì chỉ có một cặp số $(1, 1)$ thỏa mãn yêu cầu. Như vậy $M(2) = N(2) + 1$.

$n = 3$. Có 3 cặp số thỏa mãn yêu cầu: $(1, 1)$, $(1, 2)$ và $(2, 1)$. Như vậy $N(3) = 3$. Còn $M(3) = 4$ vì có 4 cách như trên Hình 24.

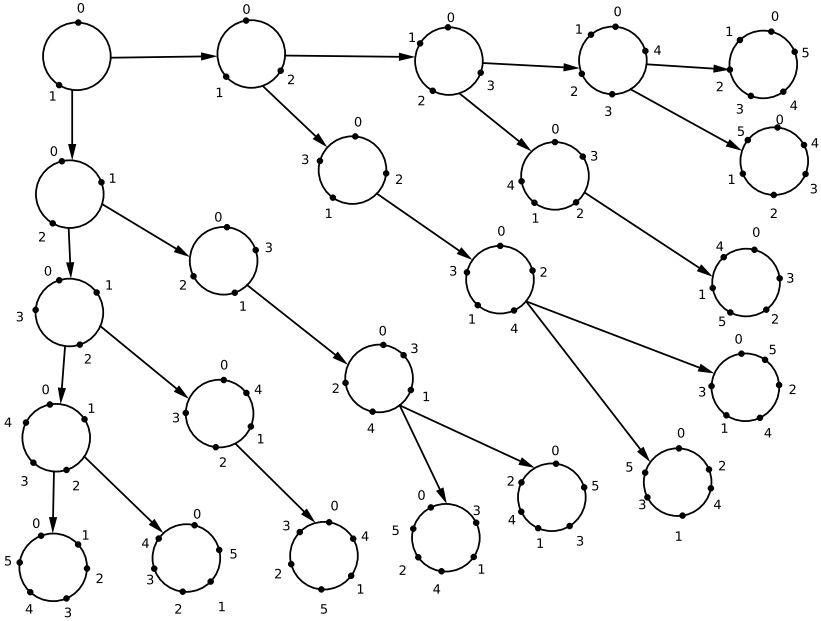


Hình 24

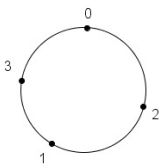
Để quan sát thấy rằng, nếu ta có một cách xếp đẹp cho các số từ 0 đến n trên vòng tròn thì khi bỏ số n đi ta sẽ được một cách xếp đẹp cho các số từ 0 đến $n - 1$, vì các điều kiện vẫn như cũ. Như vậy, ta có cách sau để xây dựng các cách xếp đẹp bằng quy nạp: Đầu tiên đánh các số 0, 1 rồi thêm 2 vào, rồi thêm 3 vào, v.v., rồi thêm $n - 1$ vào, rồi thêm n vào. Cứ làm như vậy ta được một cây rẽ nhánh các trường hợp, như trên Hình 25.

Ví dụ ta muốn thêm số 4 vào cách xếp đẹp trên Hình 26 để được cách xếp đẹp với $n = 4$. Số 4 không thể được xếp vào cung tròn nhỏ từ 1 đến 3 vì nếu xếp thế thì đoạn 04 sẽ cắt đoạn 13. Nó cũng không thể được xếp vào cung 302 vì nếu thế thì đoạn 14 sẽ cắt đoạn 23. Như vậy cách duy nhất là xếp số 4 vào cung 12 và ta được cách xếp đẹp trên Hình 27 với $n = 4$.

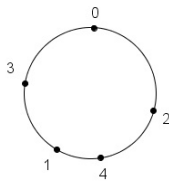
Xuất phát từ cách này bây giờ ta muốn thêm số 5. Số 5 không thể nằm ở cung 3142 (để tránh 05 cắt 23), cung 14 (để tránh 05 cắt 14), cung 314 (để tránh 25 cắt 34) và cung 24 (để tránh 15 cắt 24). Hợp của các cung đó chính là cung 3142. Như vậy số 5 có thể nằm trên cung 30 hoặc cung 02 và ta có 2 cách xếp đẹp khác nhau với $n = 5$



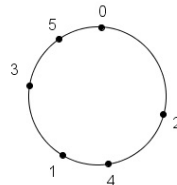
Hình 25



Hình 26



Hình 27



Hình 28

xuất phát từ cách xếp đẹp với $n = 4$ phía trên.

Trong bảng trên Hình 25 là toàn bộ các cách xếp đẹp với $n \leq 5$ nhận được bằng cách suy luận dần cho từng trường hợp như phía

trên. Chúng ta sẽ nhìn vào bảng này và phán đoán các tính chất của nó (và của quá trình tạo ra các cách xếp đẹp).

Trước hết ta có thể kiểm tra kết luận của bài toán cho $n \leq 5$:

$$M(1) = 1, M(2) = 2, M(3) = 4, M(4) = 6, M(5) = 10$$

$N(1) = 0$: không có cặp nguyên dương (k, l) nào với $k + l \leq 1$

$N(2) = 1$: $(1, 1)$ là cặp duy nhất thỏa mãn điều kiện

$N(3) = 3$: $(1, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 1)$

$N(4) = 5$: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$

$N(5) = 9$: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$

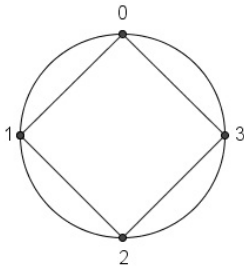
Như vậy, ta đã kiểm tra được rằng $M(n) = N(n) + 1$ với mọi $n \leq 5$.

Nhìn vào bảng với các trường hợp (với $n \leq 5$) ta quan sát thấy từ mỗi trường hợp sinh ra 1 hoặc hai trường hợp khi n tăng thêm 1. Giả thuyết quy nạp của ta sẽ là điều này đúng với mọi n , và câu hỏi sẽ là: những trường hợp nào thì sinh ra 2, những trường hợp nào thì sinh ra 1?

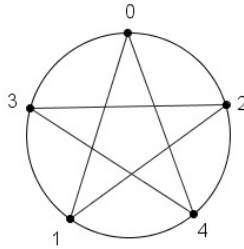
Ta thử quan sát những trường hợp "sinh đôi". (Đây là bài toán khó và tất nhiên đòi hỏi nhiều quan sát). Ta thấy một điều thú vị là các số được xếp một cách đều đặn trong các trường hợp đó nếu nối các số vào với nhau theo thứ tự $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 0$, thì ta được một đa giác đều hoặc một hình sao đều. Ví dụ như trên Hình 29.

Mặt khác, dễ dàng kiểm chứng rằng các cách sắp xếp theo đa giác đều (đánh số theo thứ tự liên tù tỳ) hoặc theo hình sao đều bất kỳ đều là cách sắp xếp đẹp với n tùy ý. Thật vậy khi ta xếp đều như vậy thì với mọi a, b, c, d sao cho $a + d = b + c$ hay $c - a = d - b$ ta có cung ac bằng cung bd khi các điểm được xếp cách đều trên vòng tròn, từ đó dễ dàng suy ra ad không cắt bc .

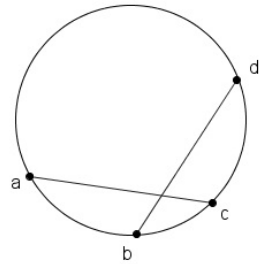
Từ quan sát trên ta có giả thuyết sau:



Hình 29



Hình 30



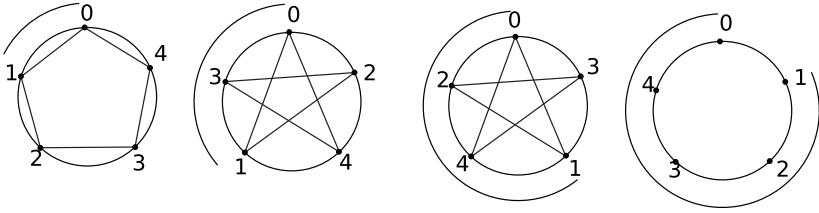
a) Mỗi cách xếp đẹp cho các số từ 0 đến n theo kiểu đa giác hay hình sao đều sinh ra đúng 2 cách xếp đẹp khi thêm một số $n + 1$ vào.

b) Mọi cách xếp đẹp khác nhau chỉ sinh ra đúng 1 cách xếp đẹp khi thêm số $n + 1$.

Chúng ta chưa biết chắc giả thuyết có đúng với n tùy ý hay không (ta có biết là nó đúng khi n nhỏ qua quan sát trực tiếp). Tạm thời coi đó là đúng ta thử tiếp chứng minh đẳng thức $M(n) = N(n) + 1$ bằng quy nạp:

Với giả sử giả thuyết (G) đúng thì $M(n + 1) - M(n) =$ cách sắp xếp đẹp cho $0, \dots, n$ mà sinh ra hai cách xếp đẹp cho $0, \dots, n + 1 =$ số cách xếp đẹp cho $0, \dots, n$ theo kiểu đa giác hay hình sao đều. Số cách chính là số các số nguyên dương $\leq n + 1$ mà nguyên tố cùng nhau với $n + 1$. Ví dụ khi $n = 4, n + 1 = 5$, ta có 4 số 1, 2, 3, 4 nhỏ hơn 5 = 4 + 1 nguyên tố cùng nhau với 5, và có 4 cách xếp đẹp và đều.

(Có tổng cộng $n + 1$ đỉnh, chia vòng tròn thành $n + 1$ cung nhỏ, và độ dài mỗi bước đi tính theo số cung nhỏ mà nó đi qua phải là số nguyên tố cùng với nhau với tổng số đỉnh thì mới đi được qua hết tất cả các đỉnh. Nếu chẳng hạn $n = 5, n + 1 = 6$ mà bước đi bằng 2 thì



Hình 31

không được).

Mặt khác, dễ thấy $N(n+1) - N(n)$ chính là số các cặp số nguyên dương xếp thứ tự (k, l) nguyên tố cùng nhau sao cho $k + l = n + 1$. Khi $k + l = n + 1$ thì k nguyên tố cùng nhau với l khi và chỉ khi k nguyên tố cùng nhau với $n + 1$. Bởi vậy $N(n+1) - N(n)$ chính là số các số nguyên dương $k \leq n$ vì $(n + 1 - k = l > 0)$ nguyên tố cùng nhau với $n + 1$, và do đó ta có

$$M(n+1) - M(n) = N(n+1) - N(n)$$

(với giả sử là giả thuyết (G) đúng), và bằng quy nạp ta suy ra

$$M(n) = N(n) + 1, \forall n.$$

Bây giờ ta quay lại chứng minh giả thuyết (G).

Lấy một cách xếp đẹp cho các số từ 0 đến n , và với mỗi số tự nhiên T xét các đoạn thẳng có tổng các đầu mút bằng đúng T . Điều kiện xếp đẹp chính là các đoạn thẳng đó không giao nhau (với mọi T). Hơn nữa, để ý quan sát (cần luôn quan sát!), chúng ta thấy các đoạn đó không chỉ giao nhau, mà còn “xếp thành chồng”, tức là có thể đánh dấu đầu đuôi của các đoạn sao cho tất cả các đầu nằm trong

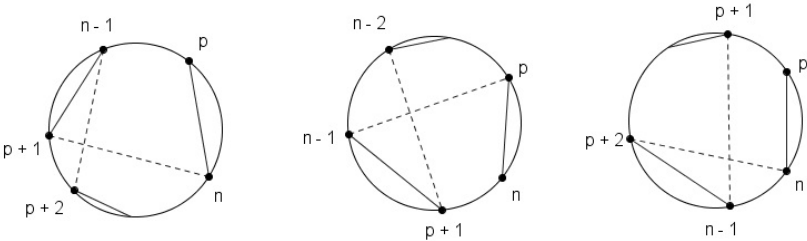
cùng một cung tròn, tất cả các đuôi nằm trong một cung tròn khác, và hai cung đó không giao nhau.

Vì sao các đoạn thẳng có cùng tổng (tổng tức là tổng của hai số đánh dấu ở hai đỉnh) lại phải “xếp thành chồng”?

Điều này có thể chứng minh bằng quy nạp theo n :

Ta có thể giả sử, theo quy nạp rằng tất cả các đoạn có cùng tổng và chỉ chứa các số $\leq n - 1$ đã xếp thành chồng bây giờ xét một đoạn chứa số n (trong một kiểu xếp đẹp các số từ 0 đến n), và chứng minh rằng đoạn đó được xếp thành chồng với đoạn còn lại có cùng tổng.

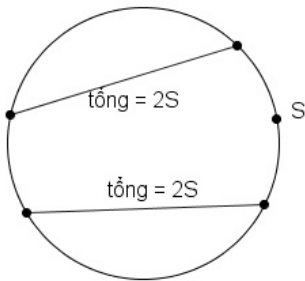
Giai đoạn đó là đoạn pn , và xét 2 đoạn $(p + 1)(n - 1)$ và $(p + 2)(n - 2)$ có cùng tổng. (Tính chất “xếp thành chồng” chỉ không tầm thường khi có từ 3 đoạn trở lên). Nếu đoạn pn xếp thành chồng với 2 đoạn $(p + 1)(n - 1)$ và $(p + 2)(n - 2)$ thì nó cũng thành chồng với tất cả các đoạn còn lại có cùng tổng. Giả sử 3 đoạn này không xếp thành chồng, tình huống khi đó sẽ tương tự như một trong các trường hợp trên Hình 32. Nếu là trường hợp ở giữa Hình 32 thì đoạn $p(n - 1)$ cắt đoạn $(p + 1)(n - 2)$, mâu thuẫn. Tương tự như vậy, các trường hợp khác cũng đều sinh ra mâu thuẫn.



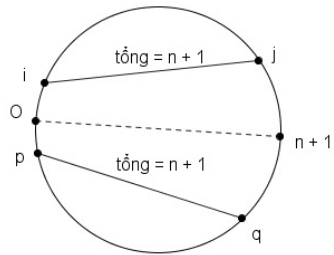
Hình 32

Chú ý thêm rằng, hiện tượng “xếp thành chồng” này đúng cho

cả “đoạn suy biến”. Khi $T = 2S$ là số chẵn và lấy các đoạn có tổng hai đầu bằng T , thì trong số đó có các đoạn suy biến thành 1 điểm S ($S + S = T$) và điểm S đó cũng phải được “xếp thành chồng” với các đoạn còn lại, tức là với trường hợp như trước đây không xảy ra trong cách xếp đẹp. (Chứng minh cho trường hợp suy biến này cũng hết như là trường hợp không suy biến).



Hình 33



Hình 34

Chính vì ràng buộc “xếp thành chồng” nên khi ta có một cách sắp xếp đẹp cho n nào đó và muốn thêm số $n + 1$ vào để sinh ra cách xếp mới thì vị trí số $n + 1$ này bị hạn chế.

Thật vậy các đoạn $0(n + 1), 1n, 2n(n - 1)$ với tổng hai đầu bằng $n + 1$ phải xếp thành chồng (kể cả đoạn suy biến nếu có). Trong đó chỉ có đoạn $0(n + 1)$ là mới, các đoạn còn lại có sẵn. Tức là phải xếp $n + 1$ vào vị trí sao cho đoạn $0(n + 1)$ tạo thành chồng với các đoạn $1(n), 2(n - 1), \dots$ Có hai tình huống xảy ra:

a) Điểm 0 bị kẹp giữa chồng $1n, 2(n - 1), \dots$ chẳng hạn kẹp giữa ij và pq , và 0 nằm trong cung ij cung này chứa 0 và không chứa thêm điểm được đánh số nào khác. Khi đó cung nhỏ jp không chứa điểm được đánh số nào từ 0 đến n bên trong nó, và ta bắt buộc phải đặt số

$n + 1$ vào đó để đoạn $0(n + 1)$ xếp thành chồng với đoạn còn lại.

b) Điểm 0 nằm trên “nóc của chồng” $1n, 2(n - 1), \dots$, có nghĩa là có một đoạn ij với tổng $i + j = n + 1$ sao cho cung ij chỉ chứa mỗi điểm 0 trong nó. Trong trường hợp này có 2 cách đặt điểm $n + 1$: hoặc trên cung $0i$, hoặc trên cung $0j$.

Bây giờ ta còn cần kiểm tra tiếp những điều sau:

A. Các cách chọn vị trí điểm $n + 1$ như trong hai trường hợp a và b phía trên thực sự sinh ra cách xếp đẹp.

B. Trường hợp b chính là trường hợp xếp đẹp và đều (thành đa giác đều hay hình sao đều).

Ta có một số quan sát khác giúp ta giải quyết việc này. Đó là nếu cố định một cung $= \alpha 2\pi$ nào đó ($0 < \alpha < 1$), và cứ xếp lần lượt các số $0, 1, \dots, n$ sao cho số trước cách số sau đúng bằng $\alpha 2\pi$ thì các điểm không bị trùng nhau (tức là $\alpha k \notin \mathbb{Z}$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$) thì ta được một cách sắp xếp đẹp. Chứng minh y hệt trường hợp hình sao đẹp phía trên.

Quan sát tiếp theo (mà ta muốn chứng minh bằng quy nạp) là bằng cách thay đổi α ta nhận được tất cả cách xếp đẹp. (Khả năng này bao gồm luôn các điều kiện cần kiểm tra phía trên). Với n nhỏ thì kiểm tra thấy hiển nhiên đúng.

Giả sử nó đúng với n nào đó. Lấy một cách xếp đẹp vị trí tương ứng của các số $k = 0, \dots, n$ trên vòng tròn sẽ là $k \cdot \alpha 2\pi \pmod{2\pi}$.

I) Nếu cách xếp này là một cách xếp đều, tức là nối được các điểm vào nhau theo thứ tự từ $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n$ rồi nối n với 0 để được một hình đa giác đều hay hình sao đều (sau khi xếp dịch các đỉnh mà không làm thay đổi thứ tự), thì ta có thể xếp dịch α thành 1 số $\hat{\alpha}$ khác sao cho cách xếp $0, 1, \dots, n$ không thay đổi về thứ tự mà được đúng

một hình đều. Trong trường hợp này, khi thay $\hat{\alpha}$ bởi $\hat{\alpha} + \varepsilon$ và $\hat{\alpha} - \varepsilon$, với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, thì cách xếp các số từ 0 đến n vẫn như cũ, nhưng ta xếp tiếp được số $n + 1$ vào các vị trí $(n + 1)(\hat{\alpha} + \varepsilon)2\pi \equiv (n + 1)\varepsilon 2\pi$ và $(n + 1)(\hat{\alpha} - \varepsilon)2\pi \equiv (n + 1)\varepsilon 2\pi \pmod{2\pi}$ (tức là ở bên trái hoặc bên phải 0) theo 2 cách khác nhau. Vậy nên mỗi cách sắp xếp đều và đẹp sinh ra 2 cách xếp đẹp khác nhau khi thêm số $n + 1$.

II) Cách xếp không đều, khi đó xếp thêm số $n + 1$ vào vị trí $(n + 1)\alpha 2\pi \pmod{2\pi}$ và ta được (duy nhất) một cách xếp đẹp cho $0, 1, \dots, n + 1$ từ cách xếp đẹp không đều này.



Lê Bích Phượng thay mặt Sputnik tặng sách và hoa thầy
Vũ Hữu Bình, tác giả cuốn sách Hình Học Tổ Hợp.

Romeo đi tìm công chúa



Lê Bích Phượng (thứ 2 bên trái) nhận giải Sách hay 2016.

Ngày 28/12/2016 vừa qua tại Hà Nội, quyển sách *Romeo đi tìm công chúa - 100 câu đố vui hóc búa* (Lê Bích Phượng và Nguyễn Tiến Dũng, Tủ sách Sputnik Số 006) đã được trao giải *Sách hay 2016* của Hội Xuất Bản Việt Nam. Để mừng sự kiện này, Sputnik xin giới thiệu đến bạn đọc một chương của quyển sách đoạt giải, chính là chương nhan đề “Romeo đi tìm công chúa”, với 21 câu đố vui về lô-gic và

chiến lược rất thú vị.

Bạn nào không tự giải được các câu đố sau một hồi lâu suy nghĩ thì có thể tìm hướng dẫn và lời giải trong sách. Cuốn sách này có bán lẻ ở nhiều nơi, và cũng có trong các bộ sách của Sputnik, như là bộ sách toán, và bộ sách *Gợi mở cảm hứng toán học*.



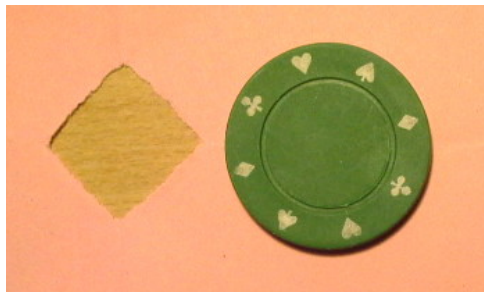
Bìa sách “Romeo đi tìm công chúa”.

Romeo là một chàng trai trẻ thông minh và dũng cảm, được sinh ra trong một gia đình nghèo khó. Một đêm, chàng mơ thấy có tiếng ai nói bên tai: “Công chúa bị bắt cóc rồi, con hãy đi tìm công chúa!”. Ngày hôm sau, thấy khắp nơi bàn tán xôn xao về chuyện công chúa vừa bị bắt cóc, Romeo nhận ra rằng giấc mơ của mình không phải là mơ mà là thật. Chàng bèn quyết tâm đi tìm công chúa.



Câu đố 1 (Khó như chui qua lỗ)

Romeo đến nhà một ông già nổi tiếng thông thái trong làng để xin ông khuyên bảo xem cần phải đi tìm công chúa như thế nào. Ông già cười và nói: “Romeo ơi, hãy về đi, sức cậu không thể tìm được công chúa đâu”. Romeo kể lại giấc mơ cho ông già nghe, và nói với ông già rằng chàng đã quyết tâm rồi, dù gặp khó khăn đến đâu cũng sẽ không lùi bước.



Đút đồng tiền to qua lỗ vuông nhỏ?

Ông già bèn lấy ra một đồng tiền vàng hình tròn có đường kính

4cm, và một tờ giấy có một cái lỗ hình vuông có đường chéo bằng 3cm. Ông già đưa tờ giấy và đồng tiền vàng cho Romeo xem và nói: “Việc tìm công chúa còn khó hơn là việc đút đồng tiền vàng qua cái lỗ vuông nhỏ này mà không làm rách giấy và không làm biến dạng đồng tiền. Cậu có làm được việc này không mà đòi đi tìm công chúa?!”

Romeo cầm đồng tiền và tờ giấy, và sau khi loay hoay một lúc đã ... đút được đồng tiền to qua lỗ giấy nhỏ (một cách trung thực chứ không phải ảo thuật), trước sự chứng kiến của ông già thông thái! Hỏi Romeo đã làm thế nào?

Câu đố 2 (Chiếc bùa hộ mệnh)

Cảm phục sự thông minh của Romeo, ông già thông thái bèn cho chàng ba đồng tiền vàng, và kể chuyện sau:

Công chúa có mẹ đỡ đầu là một bà tiên. Từ lúc công chúa còn bé, bà tiên đã tiên đoán rằng, khi lớn lên cô sẽ bị bắt cóc, nhưng sẽ được một chàng trai thông minh và dũng cảm giải cứu. Bà tiên cho cô công chúa một cái bùa hộ mệnh đeo vào người, và dặn rằng nếu khi nào thấy bị bắt cóc thì vớt bùa hộ mệnh lại, nó sẽ chỉ đường cho chàng trai trẻ kia tìm công chúa. Hôm qua, trong lúc công chúa lên đi chơi hội chợ một mình, nàng đã bị bắt cóc, và có lẽ đã kịp vớt lại chiếc bùa hộ mệnh ở chợ.

Ông già nói thêm rằng, nếu Romeo đúng là chàng trai trẻ trong lời tiên đoán của bà tiên, thì trước hết phải đi tìm được chiếc bùa hộ mệnh, chắc là ai đó đã nhặt được, và phải chuộc lại nó bằng đồng tiền vàng.

Theo lời ông già, Romeo đi đến khu chợ. Ở đó 3 người X, Y, Z rao bán bùa hộ mệnh, và cả ba đều nói rằng bùa hộ mệnh mà họ có trong tay là của công chúa vớt lại. Romeo đã được dặn trước rằng trong số

3 người bán bùa hộ mệnh, chỉ có một người thật thà luôn nói thật. Trong hai người còn lại thì có một người nói câu gì cũng là nói dối, và người kia cứ nói một câu nói dối lại đến một câu nói thật xen kẽ nhau. Có điều Romeo không biết người nào nói thật và người nào nói dối.

Khi được hỏi, ba người trả lời Romeo như sau:

Người X: “Chính tôi đã tận mắt chứng kiến công chúa rút bùa hộ mệnh này xuống đất. Còn Y và Z chỉ là những kẻ lừa đảo, luôn nói dối 100%”.

Người Y: “X và Z không phải là những người thật thà đâu. Cả hai bọn họ đều muốn lừa lấy tiền của anh đấy!”

Người Z: “Y là một kẻ lừa đảo nham hiểm cứ nói một câu thật rồi lại nói một câu dối xen kẽ nhau. Anh đừng nghe hắn ta, mà hãy xem chiếc bùa của công chúa đây này”.

Sau khi nghe X, Y, Z nói, Romeo đã luận ra được ai trong số họ là người thật thà, và đã đổi được đồng tiền vàng lấy chiếc bùa hộ mệnh của công chúa. Hỏi người đó là ai?

Câu đố 3 (Hiệp sĩ hay là kịch sĩ I)

Ông già thông thái khuyên Romeo rằng, đường đi tìm công chúa sẽ gặp rất nhiều nguy hiểm, cần phải có được hai hiệp sĩ đi cùng giúp đỡ may ra mới thành công. Bởi vậy, sau khi đã tìm được bùa hộ mệnh của công chúa, Romeo đến một làng nọ có tên gọi Kahat để tìm các hiệp sĩ.

Ở làng Kahat có hai loại người: hiệp sĩ và kịch sĩ. Các hiệp sĩ luôn nói thật, còn các kịch sĩ luôn nói dối. Khi Romeo vào làng, thấy có 3 người A, B, C. Romeo hỏi người A: “Anh là hiệp sĩ hay kịch sĩ?”. Người

A trả lời, nhưng Romeo không nghe rõ là nói gì. Romeo quay sang hỏi người B: “Anh A nói gì thế?”. Người B liền trả lời “Anh ấy nói anh ấy là kịch sĩ”. Lúc đó người C lên tiếng: “B nói dối đấy; anh A không phải kịch sĩ đâu”.

Hỏi trong ba người A, B, C ai là hiệp sĩ, ai là kịch sĩ ?

Câu đố 4 (Hiệp sĩ hay là kịch sĩ II)

Sau khi Romeo phân biệt được ai là hiệp sĩ trong những người A, B, C (của câu đố 3), thì rất tiếc là không mời được tham gia đi tìm công chúa, vì các hiệp sĩ đó đã có việc bận khác. Romeo đi tiếp vào làng, được một lúc thì lại gặp ba người D, E, F. Romeo hỏi người D: “Trong số ba anh ở đây, có bao nhiêu hiệp sĩ?”. D trả lời bằng một thứ tiếng mà Romeo không hiểu, bèn quay sang hỏi E: “Anh D trả lời gì thế?”. E nói “D bảo trong số ba chúng tôi chỉ có một hiệp sĩ”. Anh F lúc đó liền nói “Đừng tin anh E, anh ta nói dối đấy!”.

Vậy trong hai anh E và F, những anh nào là hiệp sĩ?

Câu đố 5 (Hiệp sĩ hay là kịch sĩ III)

Sau khi gặp ba anh D, E, F, Romeo cũng vẫn chưa mời được hiệp sĩ nào cả, lại đi tiếp trong làng. Được một lúc thì gặp hai anh G, H. Chưa đợi Romeo hỏi, anh G đã tự giới thiệu: “Hoặc tôi là kịch sĩ, hoặc anh H đây là hiệp sĩ”.

Hỏi ai là hiệp sĩ trong số hai người G và H?

Câu đố 6 (Hiệp sĩ hay là kịch sĩ IV)

Các hiệp sĩ đều có vẻ bận bịu, nên Romeo vẫn chưa mời được ai, lại đi tiếp trong làng, và gặp hai người I và J. Người I nói: “Chúng tôi

cùng là hiệp sĩ”. Còn người J thì nói: “Tôi với I không cùng loại với nhau”. (Tức là không cùng là hiệp sĩ hay kịch sĩ).

Hỏi ai thuộc loại gì?

Câu đố 7 (Hiệp sĩ hay là kịch sĩ V)

Vẫn chưa tìm được hiệp sĩ nào đồng ý giúp mình, Romeo lại đi tiếp trong làng. Lần này gặp ba người K, L, M. Người K nói: “Anh M là hiệp sĩ”. Người L nói: “Không ai trong số chúng tôi là kịch sĩ”. Người M nói: “Trong số chúng tôi có đúng một hiệp sĩ”.

Hỏi ai thuộc loại gì ?

Câu đố 8 (Hiệp sĩ hay là kịch sĩ VI)

Không nản chí vì vẫn chưa tìm được hiệp sĩ nào đồng ý theo mình, Romeo lại đi tiếp trong làng. Đến lúc mỗi chân, thì chợt thấy hai người N, O ngồi nghỉ dưới một gốc cây. Romeo tiến đến hỏi: “Có phải là trong hai anh có ít nhất một người là hiệp sĩ không?”. Anh N trả lời câu hỏi của Romeo (phải hoặc không phải). Từ câu trả lời của N, Romeo luận được ra câu trả lời chính xác cho câu hỏi của mình. Anh O thì không trả lời, mà nói rằng nếu có ai thuê anh ta đi cùng để tìm công chúa với giá 1 đồng tiền vàng thì anh ta sẽ sẵn sàng đi.

Hỏi anh O có phải là hiệp sĩ không, hay là kịch sĩ đang muốn lừa Romeo lấy 1 đồng tiền vàng?

Câu đố 9 (Đường đến Động Tiên I)

Cuối cùng Romeo đã tìm được hai hiệp sĩ có tên là Toto và Dario ở làng Kahat đồng ý cùng đi tìm công chúa. Romeo lôi ra hai đồng tiền vàng, là toàn bộ số tiền mà chàng còn lại, vì đã mất một đồng tiền

vàng để đổi bùa hộ mệnh của công chúa rồi, đưa cho Toto và Dario để thuê họ, nhưng họ gạt đi và nói: “Cậu nghèo hơn chúng tôi, bởi vậy chúng tôi sẽ không lấy tiền của cậu đâu. Nhưng chúng tôi vẫn sẽ giúp cậu đi tìm công chúa, vì chúng tôi thích cuộc phiêu lưu này”.

Romeo nhìn vào bùa hộ mệnh của công chúa, thấy ở trong đó hiện lên hình một bà tiên đang ngồi trong Động Tiên. Chàng hiểu rằng cần phải đến Động Tiên để nhờ bà tiên mẹ đỡ đầu của công chúa giúp đỡ. Và thế là Romeo cùng hai hiệp sĩ Toto và Dario lên đường đi đến Động Tiên.



Động Tiên nằm trong một khu rừng rậm, bốn bề là núi hiểm trở. Chỉ có một lối duy nhất để từ phía ngoài đi vào trong rừng. Ở trong rừng, thì đường đi lại rẽ nhánh liên tục. Trong đó chỉ có một lối duy nhất là đến được Động Tiên, còn các nhánh rẽ khác của con đường đều dẫn đến các cái bẫy. Đó là bởi vì bà tiên không muốn bị quấy rầy.

Những kẻ nào đi sa vào bẫy thì sẽ bị giam cầm một tháng rồi tổng thẳng về nhà, và sẽ không bao giờ gặp được bà tiên. Mỗi khi đường rẽ nhánh thì ở đầu các nhánh đều có biển chỉ dẫn, nhưng ít nhất có một biển chỉ sai ở mỗi chỗ rẽ nhánh.

Khi Romeo cùng hai hiệp sĩ vừa bước qua cửa rừng bao quanh Động Tiên được ít bước thì thấy đường rẽ làm hai nhánh A và B. Ở đầu mỗi nhánh có ghi như sau:

A: Người có chắc muốn quấy rầy Tiên không? Chọn đường sai là sẽ bị tống xuống ngục đầy!

B: Nếu đi theo nhánh A thì sẽ rơi vào bẫy.

Hỏi Romeo (và các hiệp sĩ) phải chọn đi theo nhánh nào?

Câu đố 10 (Đường đến Động Tiên II)

Sau khi Romeo đã chọn được đúng đường rẽ nhánh lúc nãy, đi được thêm một đoạn, thì lại đến một chỗ rẽ nhánh. Lần này là rẽ ba nhánh A, B, C. Ở đầu mỗi nhánh có ghi như sau:

A: Nhánh B hoặc nhánh C là đường dẫn tới động tiên

B: Nhánh A là nhánh bẫy

C: Các biển chỉ dẫn ở các nhánh A và B là đúng

Hỏi Romeo phải đi theo nhánh nào ?

Câu đố 11 (Đường đến Động Tiên III)

Sau khi Romeo toát mồ hôi suy nghĩ để tìm được đúng nhánh dẫn đến Động Tiên ở thử thách thứ hai, đi được thêm một đoạn, thì lại gặp rẽ nhánh tiếp. Lần này cũng có ba nhánh A, B, C với các chỉ dẫn sau:

A: Đừng có vào đường này

B: Hãy đi đường này hoặc là đường C

C: Đường A là đường bẫy.

Hỏi Romeo phải chọn đường nào ?

Câu đố 12 (Đường đến Động Tiên IV)

Đường rẽ ba nhánh A, B, C với các biển sau:

A: Ít ra một trong hai đường B và C là đường bẫy

B: Nên đi đường A hoặc đường C.

C: Đường A là đường bẫy, nếu không thì đường B là đường bẫy.

Chọn đường nào ?

Câu đố 13 (Đường đến Động Tiên V)

Đường rẽ ba nhánh A, B, C với các biển sau:

A. Cả hai đường B và C đều là đường bẫy, trừ khi chính đường này là đường bẫy.

B. Chỉ có thể đi đường A hoặc đường C

C. Cả hai đường A và C đều là đường bẫy, trừ khi đường B là đường bẫy

Chọn đường nào ?

Câu đố 14 (Đường đến Động Tiên VI)

Lần này đường rẽ thành 4 nhánh A, B, C, D với các biển sau:

A. Cả hai đường B và D đều là đường bẫy, trừ khi chính đường này là đường bẫy.

B. Biển ở đường C chỉ dẫn đúng, trừ khi đường C chính là đường phải đi.

C. Cả hai đường A và D đều là đường bẫy, trừ khi đường B là đường bẫy.

D. Biển ở đường A chỉ dẫn đúng, trừ khi C chính là đường phải đi.

Chọn đường nào ?

Câu đố 15 (Chiếc mũ thần)

Romeo cùng với hai hiệp sĩ đi được đúng đường tới Động Tiên mà không bị sa vào bẫy. Bà tiên đã biết trước về sự xuất hiện của 3 vị khách này, nên đã chuẩn bị sẵn 5 cái mũ, trong đó có 2 cái màu xanh và 3 cái màu đỏ. Bà tiên bảo ba chàng trai xếp thành một hàng dọc, không được trao đổi với nhau, rồi đội lên đầu mỗi người một chiếc mũ từ năm chiếc đó.

Romeo đứng đầu hàng, không nhìn thấy được bà tiên đội mũ màu gì lên đầu ai. Toto đứng giữa, nhìn thấy mũ trên đầu Romeo nhưng không nhìn thấy mũ trên đầu Dario và đầu mình. Dario đứng sau cùng nhìn thấy hai mũ trên đầu của Romeo và Toto nhưng không nhìn thấy mũ trên đầu mình. Bà tiên nói rằng “nếu ai suy luận được ra mũ mà mình đội màu nào một cách chắc chắn, thì sẽ được bà cho cái mũ đó”.



Cả Dario và Toto đều rất thông minh, nhưng đều lần lượt nói rằng họ không suy luận được mũ họ đội trên đầu màu gì. Đến lượt Romeo, thì Romeo lại suy luận được ra là đang đội mũ màu gì, và được bà tiên tặng cho cái mũ đó.

Chiếc mũ mà bà tiên tặng cho Romeo chính là một chiếc mũ thần. Mỗi khi gặp khó khăn đặc biệt, Romeo lại có thể cầu cứu bà tiên qua chiếc mũ đó, và mỗi lần như vậy bà tiên lại mách nước cho chàng.

Bạn có biết Romeo đội mũ màu gì không?



Câu đố 16 (Con ngỗng trời)

Theo sự chỉ đường của chiếc bùa hộ mệnh, Romeo cùng với hai hiệp sĩ cứ thế nhằm hướng công chúa đang bị giam cầm mà đi. Họ phải xuyên rừng, lội suối, trèo đèo, chống chọi với bao thú dữ, may mà có hai hiệp sĩ đi cùng nên Romeo chỉ bị những vết sây sát. Sau một chặng đường rất dài, họ đã tiến tới gần sát tòa lâu đài bí hiểm nơi công chúa bị giam giữ.

Tòa lâu đài này nằm trên đỉnh núi cheo leo, và từ chỗ họ đến chỗ lâu đài là một vực núi dựng đứng rất sâu, không có cách gì đi qua được. Romeo bèn cầu cứu bà tiên qua chiếc mũ thần.

Bà tiên xuất hiện trên một con ngỗng trời, và đem theo một con lừa. Bà nói với Romeo rằng:

- Con lừa này tuy hơi còi nhưng rất giỏi, có thể trèo núi. Con mà cưới lừa này đi thì trong một ngày sẽ sang được bên kia vực. Bây giờ con hãy nói duy nhất một câu gì đó đi. Nếu là câu nói sai thì ta sẽ không cho con cái gì cả, còn nếu là câu nói đúng thì ta sẽ cho con con lừa.



Con lừa còi của bà tiên chở được một người, nhưng không thể chở nổi hai người. Nếu Romeo cưới nó sang bên kia vực, thì khi tìm được công chúa rồi sẽ không cùng với công chúa cưới lừa về lại phía bên này vực được. Cái mà Romeo cần là con ngỗng trời to khỏe hơn, chở được nhiều người, và bay nhanh qua được vực, chứ không phải con lừa.

Hãy giúp Romeo tìm ra một câu nói để nhận được con ngỗng trời từ bà tiên!

Câu đố 17 (Bốn chiếc chìa khóa)

Bà tiên cho mượn con ngỗng trời, rồi hướng dẫn Romeo và hai hiệp sĩ cách điều khiển nó trước khi cưới mây bay về động tiên. Sau một hồi loay hoay, ba chàng cũng đã biết cách ngồi lên lưng ngỗng

và lái nó bay đến nơi mình muốn. Có ba người nên phải bay hai lần đó, vì ngỗng trời một lần chỉ trở được nhiều nhất hai người thôi. Nhờ có ngỗng trời, ba chàng đã đến được trước tòa lâu đài. Cửa tòa lâu đài đóng kín mít, và xung quanh cũng không có lối nào khác để đi vào. Chợt Romeo nhìn thấy một tảng đá trông có vẻ hơi bị xê dịch. Mọi người kéo tảng đá ra thì thấy đây có vẻ như một đường hầm. Nhưng cửa vào đường hầm rất nhỏ, Toto và Dario to lớn quá không chui qua được, nên chỉ có Romeo chui vào thôi, còn hai hiệp sĩ đứng ngoài chờ cùng với chú ngỗng.

Romeo đi theo đường hầm một lúc, thì thấy có một cánh cửa. Ở trên cánh cửa có bốn ổ khóa trông giống nhau xếp thành một hàng dọc. Ngay bên cạnh đó có treo bốn chiếc chìa khóa trông cũng giống hệt nhau. Bà tiên nói thầm qua chiếc mũ vào tai Romeo là chỉ cần lấy bốn chìa cắm đúng vào bốn ổ thì cửa sẽ tự mở ra.



Thế nhưng nếu cắm nhầm chìa này vào ổ khóa khác thì bọn yêu tinh sẽ được báo động và sẽ xuất hiện.

Romeo đang chưa biết phải làm thế nào để biết chìa nào cần cắm vào ổ nào thì được bà tiên mách bảo là các chìa khóa này nặng nhẹ khác nhau. Cái nào nhẹ nhất là của ổ khóa trên cùng, nhẹ nhì là ổ khóa tiếp theo, cứ thế đến cái nặng nhất là của ổ khóa dưới cùng. Giở mũ thần ra sẽ thấy bên trong có một cái cân bé tí xíu, có thể dùng để

cân các chìa khóa với nhau. Nhưng sẽ chỉ dùng được 5 lần thôi là cân sẽ hỏng, không cân tiếp được nữa.

Romeo phải cân các chìa khóa như thế nào, để biết chắc được chìa nào cần cắm vào ổ nào mà chỉ cần không quá 5 lần cân?

Câu đố 18 (Công chúa ở đâu?)

Romeo mở được cửa vào bên trong, thì thấy đây trông có vẻ như là khu tầng hầm của lâu đài, nơi chứa các tù nhân và các con hổ dữ. Nhìn xung quanh thấy có 4 cánh cửa A, B, C, D đang đóng. Có kẻ bí hiểm nào đó đã ghi những bảng chỉ dẫn sau trên các cánh cửa:

A: công chúa sau cửa B hoặc C

B: công chúa sau cửa A hoặc D

C: công chúa ở đây

D: công chúa không ở đây

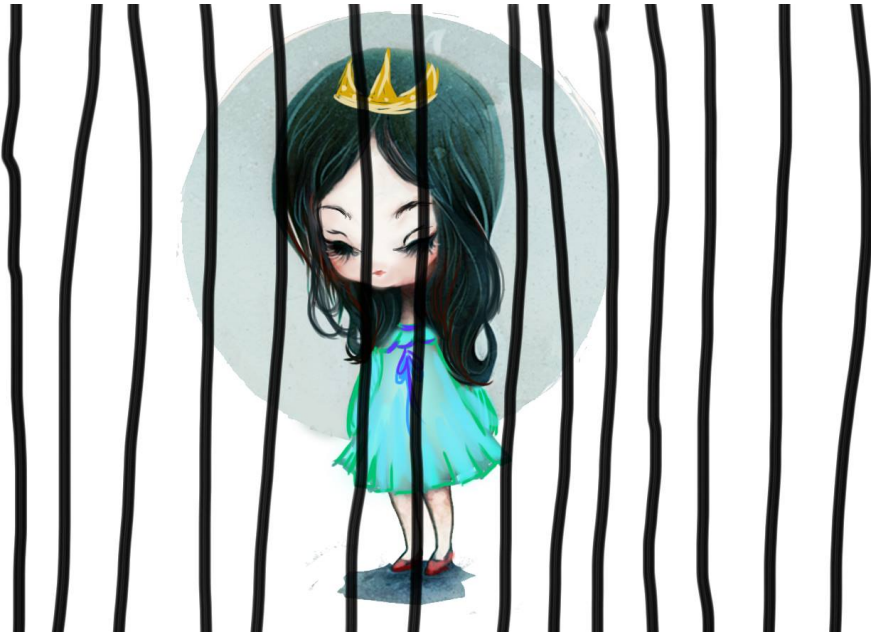
Romeo được bà tiên mách cho rằng chỉ có 1 trong số các biển chỉ dẫn là đúng, còn 3 biển chỉ sai, và nếu mở sai cửa thì sẽ gặp phải những con hổ dữ xông ra tấn công.

Romeo phải mở cửa nào để đến được với công chúa chứ không bị hổ ăn thịt?

Câu đố 19 (Cánh cửa tự động)

Romeo đã xác định được đúng cửa dẫn tới chỗ công chúa. Chàng mở then cài, đẩy cửa bước vào bên trong. Ở trong đó, công chúa đang bị nhốt sau một cửa chắn song bằng sắt. Đây là một loại cửa tự động, mở bằng mã số chứ không phải bằng chìa khóa. Ở trước cửa có một bảng các nút đánh số từ 0 đến 9, và thêm hai nút “Mở” và “Đóng”.

Khi ai đó bấm vào nút “Mở”, thì phía trên cánh cửa lần lượt sẽ hiện ra, theo một thứ tự ngẫu nhiên, tất cả các số có hai chữ số, từ 00 cho đến 99, trừ đúng một số. Số không hiện ra chính là mã số để mở cửa lần đó. Mỗi số chỉ hiện ra trong đúng 10 giây, và sau khi tất cả các số hiện ra thì người mở cửa cũng chỉ có đúng 30 giây để bấm mã số vào bảng nút số. Nếu bấm đúng số thì cánh cửa sẽ tự động mở ra, còn nếu bấm sai hoặc không kịp bấm thì báo động sẽ nổi lên và bọn yêu tinh canh giữ công chúa sẽ xuất hiện.



Ở trong phòng không có dụng cụ gì và Romeo không đem theo dụng cụ gì để ghi lại các số, và tuy Romeo tính toán nhanh và chính

xác nhưng không phải là người có trí nhớ siêu phàm. Hỏi Romeo phải làm thế nào để kịp thời tìm ra đúng mã số và mở cửa sắt giải cứu công chúa?

Câu đố 20 (Cuộc vượt vực)

Romeo mở được cửa chắn song sắt cứu công chúa ra. Công chúa hỏi chàng là ai. Chàng bèn đưa bùa hộ mệnh cho công chúa xem. Đây thực ra chỉ là một nửa của chiếc bùa hộ mệnh của công chúa. Công chúa vẫn giữ nửa còn lại. Công chúa ghép hai nửa vào nhau thấy khớp và nhận ra rằng đây chính là người mà bà tiên đã tiên đoán sẽ đến giải cứu cho mình.

Công chúa theo Romeo chạy ra ngoài. Nhưng vừa chạy đến phòng ngoài thì đã thấy hai tên yêu tinh xuất hiện, trông rất ghê sợ. Công chúa nhanh trí mở lọ nước hoa giấu theo người, vẩy vào mỗi tên yêu tinh một giọt nước hoa. Yêu tinh không quen với mùi thơm, khi ngửi phải nước hoa thì ngất ngã lăn quay ra sàn. Công chúa cùng với Romeo men theo đường hầm chạy tiếp ra ngoài, nơi có hai hiệp sĩ và chú ngỗng trời đang đợi.

Mọi người cần lên lưng ngỗng để nó chở sang bên kia vực. Có điều, ngỗng chỉ chở được tối đa hai người thôi và muốn ngỗng bay đến đâu đó thì cần có người ngồi trên lưng nó để điều khiển chứ tự nó không biết bay đến nơi cần thiết. Khi có hai người trên lưng ngỗng thì cả hai cần phải điều khiển ngỗng, và nó chỉ bay được với tốc độ điều khiển của người “hậu đậu” nhất trong hai người. Nếu chỉ có một mình Romeo trên lưng ngỗng thì chỉ cần 2 phút là ngỗng bay được từ bờ vực này sang bờ vực kia. Nhưng nếu có thêm Toto hoặc một mình Toto thì cần 4 phút vì Toto không khéo tay bằng Romeo. Nếu có Dario trên lưng ngỗng (một mình hay với một trong hai chàng

kia) thì cần 8 phút, còn nếu có công chúa trên lưng ngỗng (dù là một mình hay với một trong ba chàng) thì vì công chúa chưa kịp làm quen với ngỗng, nên sẽ mất 15 phút để bay từ bờ vực này sang bờ vực kia.

Nước hoa của công chúa chỉ có tác dụng 30 phút thôi, sau 30 phút bọn yêu tinh sẽ tỉnh dậy, và sẽ báo động cho các yêu tinh của toàn lâu đài xông ra. Làm sao để tất cả bốn người sang được phía bên kia vực (chứ không đang còn trên lưng ngỗng, vì trên lưng ngỗng cũng sẽ bị yêu tinh bắt) trong không quá 30 phút bây giờ?

Câu đố 21 (Phần thưởng xứng đáng)

Romeo cùng hai hiệp sĩ đã giải cứu được công chúa, đưa được sang bên kia vực và về nhà an toàn. Để cảm ơn họ, công chúa hứa sẽ xin vua thưởng cho Romeo 100 đồng tiền vàng và mỗi chàng hiệp sĩ 50 đồng tiền vàng.

Công chúa hơi thất vọng vì người cứu mình không phải là một hoàng tử như trong truyện cổ tích, mà lại là một anh nông dân. Tuy nhiên, công chúa vẫn muốn đánh đổi bùa hộ mệnh của mình lấy cái mũ trên đầu của Romeo làm kỷ niệm. Công chúa yêu cầu Romeo trả lời một câu về đề nghị đó. Nếu câu nói là đúng thì đổi, sai thì thôi. Nhưng điều mà Romeo muốn nhất là được công chúa thơm.

Romeo đã nói thế nào để vừa được đổi mũ lấy chiếc bùa hộ mệnh, vừa được công chúa thơm?

* * *

Sau khi công chúa thơm Romeo và đổi bùa hộ mệnh lấy mũ, thì nghe thấy tiếng thềm thì của bà tiên qua chiếc mũ đó: “Romeo cũng chính là con đĩ đầu của mẹ đây, tuy mẹ chưa cho cậu ta biết chuyện

đây, để cậu ta luôn cố gắng mà không ỷ lại. Mẹ rất mừng vì hai con đỗ đầu của mẹ đã gặp được nhau”. Từ khi nghe thấy điều đó, công chúa vui hẳn lên.

Sau khi về đến cung vua và đưa tiền thưởng cho hai hiệp sĩ, công chúa và Romeo trốn đi chơi với nhau trên lưng con lừa mà bà tiên cho từ dạo trước. Con lừa không còn gầy còm như trước nữa mà đã to béo khỏe mạnh hơn nhiều, có hai người trên lưng mà vẫn phi băng băng. Chuyện đến đây... là hết.



Hai thành viên Lan Phương và Bích Phượng của Sputnik (đứng giữa) tại giải sách hay 2016.

Các tiêu chí cho SGK

Nhân dịp năm mới 2017, Tạp chí Tia Sáng có mời GS. Nguyễn Tiến Dũng viết một bài báo về vấn đề “Làm sao để có sách giáo khoa hay”, dài khoảng 4 trang khổ A4 (trước khi chỉnh sửa rút gọn bớt)? Xin mời các bạn quan tâm tới vấn đề này tìm đọc số Tết con Gà của báo Tia Sáng. Ở đây, Sputnik chỉ xin đưa ra một danh sách 20 tiêu chí dành riêng cho các sách giáo khoa về môn toán. Hy vọng rằng trong tương lai gần, các học sinh Việt Nam sẽ được học theo những sách thỏa mãn các tiêu chí này.

1. Phủ được hết các kiến thức đề ra trong chương trình khung. Ngoài ra, sách có thể giới thiệu thêm các kiến thức liên quan khác có tính gợi mở, dành cho những học sinh tò mò muốn hiểu biết thêm.

2. Gọn gàng, không rườm rà rối rắm, không lan man lạc đề với những thứ quá khó, quá xa so với yêu cầu của môn học.

3. Đúng đắn, chính xác về mặt kiến thức khoa học, không mắc các lỗi sai về toán.

4. Ngôn ngữ trong sáng mạch lạc, đúng ngữ pháp và chính tả, có giải thích các từ khó hiểu.

5. Trình bày đẹp, khổ chữ và khổ sách thích hợp, in ấn chất lượng

đảm bảo, dễ cảm không quá nặng.

6. Giải thích từng khái niệm toán học mới một cách rõ ràng, trực quan, dễ hiểu, đúng bản chất. Có giải thích khái niệm đó dùng để làm gì, vì sao người ta lại cần đến nó?

7. Kèm theo mỗi khái niệm mới phải có một số ví dụ minh họa đặc trưng tiêu biểu.

8. Không lẫn lộn giữa “định nghĩa” (cho bản thân một khái niệm) và “định lý” (cho các tính chất của khái niệm đó).

9. Sinh động và gần gũi thực tế. Trong mỗi phần đều có những ví dụ minh họa từ cuộc sống thực tế và từ các môn học khác cho thấy ứng dụng của các kiến thức toán được học, chứ không chỉ là “toán suông”.

10. Các số liệu trong các ví dụ từ thực tế phải là số liệu thật và chính xác, thích đáng, chứ không phải là số liệu bịa, giả thực tế nhưng không phải thực tế.

11. Các minh họa phải thích hợp và giúp ích cho việc học. Đặc biệt là các hình vẽ của môn hình học phải được vẽ đúng đắn, cẩn thận, thể hiện đúng bản chất của khái niệm, định lý hay bài tập tương ứng. Sử dụng tối đa công cụ máy tính (ví dụ như phần mềm geogebra) trong việc vẽ hình.

12. Có kèm hướng dẫn học sinh sử dụng công cụ máy tính trợ giúp cho việc tính toán. Chú trọng các phần mềm miễn phí (có khá nhiều và khá tốt) hay mã nguồn mở, không ép dùng máy thương mại (như kiểu máy tính bỏ túi casio) hay phần mềm thương mại mã đóng.

13. Dễ tra cứu với các phần mục lục, chỉ mục, tóm tắt nội dung, v.v., có chỉ dẫn đến các tài liệu tham khảo và hoạt động bổ sung.

14. Có độ khó, độ phức tạp thích hợp; cân bằng giữa độ sâu và

độ rộng của kiến thức.

15. Nội dung được sắp xếp theo mọi thứ tự lô-gic, chia thành chương, mục hợp lý, sao cho có thể học theo đúng trình tự của quyển sách: để hiểu được kiến thức ở một chỗ nào đó thì không cần đọc trước các chỗ ở phía sau, mà chỉ cần biết các kiến thức viết ở phía trước.

16. Tạo kết nối hợp lý giữa các năm học, và với các môn học khác.

17. Đi kèm các công cụ để đánh giá kiến thức và kỹ năng học được. Mỗi mục đều chứa các câu hỏi và các bài tập cơ bản, để qua đó học sinh có thể tự kiểm tra xem đã nắm được đúng kiến thức chưa.

18. Mỗi mục đều có kèm theo một vài mẩu chuyện nhỏ, hấp dẫn và dễ đọc, về các nhà toán học, lịch sử toán học, các câu chuyện thú vị liên quan tới kiến thức, v.v. để gây thêm sự tò mò, kích thích học sinh, làm cho sách thêm hay.

19. Khuyến khích học sinh suy nghĩ, đặc biệt là suy nghĩ “bậc cao”. Hướng cho học sinh suy nghĩ kiểu chiến lược, thuật toán, qua việc trình bày bản thân các khái niệm và các bài tập theo lối đó: khi ta gặp một vấn đề, thì phương hướng tìm cách giải quyết ra sao, dẫn đến thuật toán để giải và các khái niệm toán học tương ứng như thế nào.

20. Sách phải có thể dùng để tự học được (trong điều kiện thiếu người hướng dẫn).

Để làm ví dụ tiêu biểu về sách giáo khoa viết hay, có thể lấy bộ sách “Hình học sơ cấp” của Kiselev (sẽ viết tắt là HHSC, gồm hai phần Hình học phẳng và Hình học không gian, đã được dịch từ tiếng Anh ra tiếng Việt, trong Tủ sách Sputnik). Không phải vô cớ mà nó được nhiều chuyên gia đánh giá là bộ sách giáo khoa hình học phổ thông

hay nhất trên thế giới được viết trong một thế kỷ qua. Trên thế giới hiện tại chỉ có hai bộ sách hình học (sơ cấp) được coi là kinh điển đáng đọc, là bộ của Euclid và bộ của Kiselev, và nếu so sánh hai bộ thì bộ của Kiselev ắt hẳn hay hơn, vì trình bày sáng sủa và hiện đại hơn, đồng thời chứa nhiều kiến thức mà trong bộ của Euclid không có. Nếu chiếu theo các tiêu chí phía trên, thì bộ sách của Kiselev thỏa mãn hầu hết các tiêu chí. Nếu như sách có một “điểm yếu” nào đó, thì có lẽ là sự thiếu vắng các ví dụ từ thực tế hiện đại, vì sách được viết từ cách đây khá lâu (nhưng không có nghĩa là sách không có ví dụ minh họa, và tất nhiên nhiều ví dụ kinh điển cho đến nay vẫn còn nguyên giá trị).

Ví dụ về sách viết dở, và đi ngược lại một số tiêu chí cơ bản trong các tiêu chí trên, thì rất nhiều. Một vài ví dụ nhỏ về trình bày kiến thức dở, rắc rối, lẫn lộn giữa định nghĩa khái niệm và định lý trong các sách:

- Có sách toán viết: “căn bậc hai của a bình phương thì bằng trị tuyệt đối của a , căn bậc hai của A bình phương bằng trị tuyệt đối của A ” (Hai câu giống hệt nhau, chỉ thay a nhỏ bằng A to).

- Có sách định nghĩa "số hữu tỷ là số thật phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn". (Thay vì nói đúng bản chất của số hữu tỷ: là số viết được dưới dạng phân số).

- Có sách định nghĩa "hai phân số a/b và c/d gọi là bằng nhau nếu $ad = bc$ ". (Bằng nhau là chúng thể hiện các đại lượng bằng nhau, còn " $ad=bc$ thì bằng nhau" thì là tiêu chuẩn để kiểm tra sự bằng nhau).

Học tiếng Anh cùng “Hoàng tử bé”

Ở Việt Nam, lần đầu tiên vào cuối năm 2016, quyển truyện “Hoàng tử bé” (“Le petit prince”, “The little prince”) của tác giả Antoine de Saint-Exupéry đã được xuất bản dưới dạng song ngữ Anh-Việt (phiên bản đầy đủ), do Sputnik thực hiện, nhằm phục vụ bạn đọc vừa học tiếng Anh vừa tìm hiểu một tác phẩm văn học tuyệt vời: “Hoàng tử bé” đã được dịch ra 270 thứ tiếng trên thế giới, in tổng cộng 150 triệu bản, và được vào trong danh sách 100 tác phẩm văn học hay nhất mọi thời đại.

Dịch giả sách song ngữ “The little prince - Hoàng tử bé” là ông Nguyễn Tuấn Việt, một người từng học cả phổ thông lẫn đại học ở nước ngoài, thông thạo cả tiếng Anh và tiếng Pháp, và là một dịch giả và biên tập viên nhiều kinh nghiệm cho những nhà xuất bản lớn ở Việt Nam.

Bạn đọc muốn học tiếng Anh có thể đồng thời vừa đọc sách “The little prince - Hoàng tử bé”, vừa nghe audio miễn phí (phần tiếng Anh) trên youtube, sẽ nhanh tiến bộ.

Sputnik xin trích dẫn ở đây một đoạn từ quyển sách: Chương XXI
(Hoàng tử bé kết giao với cáo)



It was then that the fox appeared.

"Good morning," said the fox.

"Good morning," the little prince responded politely, although when he turned around he saw nothing.

"I am right here," the voice said, "under the apple tree."

"Who are you?" asked the little prince, and added, "You are very pretty to look at."

"I am a fox," said the fox.

"Come and play with me," proposed the little prince. "I am so unhappy."

Chính lúc đó mà cáo xuất hiện.

"Chào buổi sáng," cáo nói

"Chào buổi sáng," hoàng tử bé lịch sự đáp, dù chẳng nhìn thấy gì khi quay người lại.

"Tôi ở ngay đây nè," giọng nói cất lên, "dưới cây táo ấy."

"Bạn là ai?" hoàng tử bé hỏi, rồi nói thêm, "trông bạn rất xinh đấy."

"Tôi là cáo đây," cáo nói.

"Lại đây chơi với tôi đi," hoàng tử bé đề nghị. "Tôi đang buồn rầu quá ."

"I cannot play with you," the fox said. "I am not tamed."

"Ah! Please excuse me," said the little prince. But, after some thought, he added:

"What does that mean – 'tame'?"

"You do not live here," said the fox. "What is it that you are looking for?"

"I am looking for men," said the little prince. "What does that mean – 'tame'?"

"Men," said the fox. "They have guns, and they hunt. It is very disturbing. They also raise chickens. These are their only interests. Are you looking for chickens?"

"No," said the little prince. "I am looking for friends. What does that mean – 'tame'?"

"It is an act too often neglected," said the fox. It means to create ties."

"Tôi không chơi với bạn được," cáo nói. "Tôi chưa được thuần hóa."

"A! Thứ lỗi cho tôi nhé," hoàng tử bé nói. Nhưng, sau chút nghĩ ngợi, nhóc nói thêm:

"'Thuần hóa' nghĩa là gì vậy?"

"Bạn không sống ở đây rồi," cáo nói. "Bạn đang tìm gì vậy?"

"Tôi tìm con người," hoàng tử bé nói. "'Thuần hóa' nghĩa là gì vậy?"

"Con người," cáo nói. "Họ có súng, và họ đi săn. Điều đó rất phiền toái. Họ còn nuôi gà nữa. Đó là thứ hay ho duy nhất của họ. Bạn có tìm gà không?"

"Không." Hoàng tử bé nói. "Tôi tìm bạn bè. 'Thuần hóa' nghĩa là gì vậy?"

"Đó là một hành động thường bị phớt lờ," cáo nói. Nó có nghĩa là thiết lập những mối liên hệ."



"To create ties?"

"Just that," said the fox. "To me, you are still nothing more than a little boy who is just like a hundred thousand other little boys. And I have no need of you. And you, on your part, have no need of me. To you, I am nothing more than a fox like a hundred thousand other foxes. But if you tame me, then we will need each other. To me, you will be unique in all the world. To you, I will be unique in all the world..."

“Thiết lập những mối liên hệ?”

“Chính thế,” cáo nói. “Với tôi, bạn chẳng là gì khác hơn một cậu bé như muôn vàn cậu bé khác. Và tôi chẳng cần gì bạn cả. Còn về phần bạn, bạn cũng chẳng cần tôi. Với bạn, tôi chỉ là con cáo như muôn vàn con cáo khác. Nhưng nếu bạn thuần hóa tôi thì chúng ta sẽ cần đến nhau. Với tôi, bạn sẽ là độc nhất trên thế gian. Với bạn, tôi cũng là độc nhất thế gian này...”

"I am beginning to understand," said the little prince. "There is a flower... I think that she has tamed me..."

"It is possible," said the fox. "On the Earth one sees all sorts of things."

"Oh, but this is not on the Earth!" said the little prince.

The fox seemed perplexed, and very curious.

"On another planet?"

"Yes."

"Are there hunters on that planet?"

"No."

"Ah, that is interesting! Are there chickens?"

"No."

"Nothing is perfect," sighed the fox. But he came back to his idea.

"Tôi bắt đầu hiểu ra rồi," hoàng tử bé nói. "Có một bông hoa... tôi nghĩ nó đã thuần hóa tôi..."

"Có thể lắm," cáo nói. "Trên Trái Đất, người ta thấy đủ thứ chuyện."

"Ồ, nhưng chuyện đó đâu phải trên Trái Đất!" hoàng tử bé nói.

Cáo có vẻ bối rối và rất tò mò.

"Trên một hành tinh khác ư?"

"Phải."

"Hành tinh đó có thợ săn không vậy?"

"Không."

"A, hay quá! Ở đó có gà không?"

"Không."

"Chẳng có gì là hoàn hảo cả," cáo thở dài. Nhưng nó trở lại ngay với suy tư của nó.

"My life is very monotonous," the fox said. "I hunt chickens; men hunt me. All the chickens are just alike, and all the men are just alike. And, in consequence, I am a little bored. But if you tame me, it will be as if the sun came to shine on my life. I shall know the sound of a step that will be different from all the others. Other steps send me hurrying back underneath the ground. Yours will call me, like music, out of my burrow. And then look: you see the grain-fields down yonder? I do not eat bread. Wheat is of no use to me. Wheat fields say nothing to me. And that is sad. But you have hair that is the colour of gold. Think how wonderful that will be when you have tamed me! The wheat, which is golden, will bring me back the thought of you. And I shall love to listen to the wind in the wheat..."

"Đời tôi rất đơn điệu," cáo nói. "Tôi săn gà, còn người thì săn tôi. Mọi con gà đều hệt như nhau, và mọi con người đều giống nhau như đúc. Và hậu quả là tôi thấy hơi nhàm chán. Nhưng nếu bạn thuần hóa tôi, điều đó sẽ giống như Mặt Trời rọi sáng cuộc đời tôi vậy. Tôi sẽ biết âm thanh của bước chân khác với tất cả mọi bước chân còn lại. Những bước chân còn lại xua tôi chạy vội về để rúc xuống dưới đất. Bước chân của bạn thì như tiếng nhạc, mời gọi tôi ra khỏi hang. Và nhìn kia, bạn có thấy cánh đồng lúa dưới kia không? Tôi không ăn bánh mì. Lúa mì chẳng ích lợi gì cho tôi. Những cánh đồng lúa mì chẳng nói lên điều gì với tôi cả. Và điều đó thật buồn. Nhưng bạn có mái tóc màu vàng. Bạn nghĩ coi sẽ tuyệt vời ra sao nếu bạn thuần hóa tôi! Lúa mì, vốn dĩ cũng màu vàng, sẽ gọi cho tôi nhớ về bạn. Và tôi sẽ mê mẩn nghe gió lùa qua lúa..."

The fox gazed at the little prince, for a long time.

"Please— tame me!" he said.

"I want to, very much," the little prince replied. "But I have not much time. I have friends to discover, and a great many things to understand."

"One only understands the things that one tames," said the fox. "Men have no more time to understand anything. They buy things all ready made at the shops. But there is no shop anywhere where one can buy friendship, and so men have no friends any more. If you want a friend, tame me..."

"What must I do, to tame you?" asked the little prince.

"You must be very patient," replied the fox.

Cáo nhìn hoàng tử bé không rời mắt.

"Làm ơn. . . hãy thuần hóa tôi đi!" nó nói.

"Tôi muốn lắm chú," hoàng tử bé đáp lời. "Nhưng tôi chẳng có nhiều thời gian. Tôi còn phải phát hiện những người bạn và còn bao nhiêu điều phải tìm hiểu nữa."

"Người ta chỉ hiểu những gì mình thuần hóa," cáo nói. "Con người chẳng còn đâu thời gian để hiểu được điều gì. Họ mua những thứ chế tạo sẵn ở các cửa hàng. Nhưng chẳng có cửa hàng nào ở bất cứ đâu có bày bán tình bạn, cho nên con người chẳng còn bạn bè. Nếu muốn có một người bạn, xin bạn hãy thuần hóa tôi đi. . ."

"Tôi phải làm gì để thuần hóa bạn đây?" hoàng tử bé hỏi.

"Bạn phải rất kiên trì," cáo đáp.



"First you will sit down at a little distance from me– like that– in the grass. I shall look at you out of the corner of my eye, and you will say nothing. Words are the source of misunderstandings. But you will sit a little closer to me, every day..."

The next day the little prince came back.

"It would have been better to come back at the same hour," said the fox. "If, for example, you come at four o'clock in the afternoon, then at three o'clock I shall begin to be happy. I shall feel happier and happier as the hour advances.

"Trước hết, bạn hãy ngồi xuống cỏ, cách xa tôi một chút... như thế này này... Tôi sẽ nhìn bạn qua khóe mắt, và bạn sẽ không nói gì cả. Lời lẽ là cội nguồn những hiểu lầm. Nhưng bạn sẽ ngồi xích lại gần tôi hơn mỗi ngày..."

Ngày hôm sau, hoàng tử bé trở lại.

"Sẽ là tốt hơn nếu bạn trở lại vào cùng một giờ," cáo nói. "Nếu, lấy ví dụ, bạn đến vào lúc bốn giờ chiều, thế thì từ lúc ba giờ chiều tôi đã bắt đầu vui sướng. Tôi sẽ càng lúc càng cảm thấy vui sướng hơn khi thời gian tiến lên.

At four o'clock, I shall already be worrying and jumping about. I shall show you how happy I am! But if you come at just any time, I shall never know at what hour my heart is to be ready to greet you... One must observe the proper rites..."

"What is a rite?" asked the little prince.

"Those also are actions too often neglected," said the fox. "They are what make one day different from other days, one hour from other hours. There is a rite, for example, among my hunters. Every Thursday they dance with the village girls. So Thursday is a wonderful day for me! I can take a walk as far as the vineyards. But if the hunters danced at just any time, every day would be like every other day, and I should never have any vacation at all."

So the little prince tamed the fox. And when the hour of his departure drew near –

Vào lúc bốn giờ, tôi chưa gì đã lo lắng, đã bồn chồn. Tôi sẽ cho bạn thấy tôi vui sướng thế nào! Nhưng nếu bạn đến vào bất cứ khi nào, tôi sẽ chẳng bao giờ biết lúc mấy giờ trái tim tôi phải sẵn sàng chào đón bạn... Ta phải tuân thủ những nghi thức..."

"Nghi thức là gì vậy?" hoàng tử bé hỏi.

"Đó cũng là những hành động thường bị phớt lờ," cáo nói. "Chúng là thứ làm cho một ngày khác với mọi ngày, một giờ khác với mọi giờ. Lấy ví dụ, có một nghi thức ở những người thợ săn. Mỗi thứ Năm, họ nhảy múa với các cô gái làng. Cho nên thứ Năm là một ngày tuyệt vời với tôi! Tôi có thể đi dạo đến mãi tận những ruộng nho. Nhưng nếu những người thợ săn nhảy múa bất cứ lúc nào thì ngày nào cũng sẽ như ngày nào, và tôi sẽ chẳng có dịp nào ngơi nghỉ."

Thế là hoàng tử bé thuần hóa con cáo. Và khi giờ khắc ra đi đến gần...

"Ah," said the fox, "I shall weep."

"It is your own fault," said the little prince. "I never wished you any sort of harm; but you wanted me to tame you..."

"Yes, that is so," said the fox.

"But now you are going to weep!" said the little prince.

"Yes, that is so," said the fox.

"Then it has done you no good at all!"

"It has done me good," said the fox, "because of the color of the wheat fields." And then he added:

"Go and look again at the roses. You will understand now that yours is unique in all the world. Then come back to say goodbye to me, and I will make you a present of a secret."

"A," cáo nói, "tôi sẽ khóc đây."

"Lỗi là do chính bạn," hoàng tử bé nói. "Tôi chẳng bao giờ mong bất cứ điều gì tổn thương bạn; nhưng tự bạn muốn tôi thuần hóa bạn đấy thôi. . ."

"Phải, đúng là như thế," cáo nói.

"Nhưng giờ thì bạn sắp khóc đến nơi rồi!" hoàng tử bé nói.

"Phải, đúng là như thế," cáo nói.

"Vậy thì việc đó đâu có tốt chút nào cho bạn!"

"Nó tốt cho tôi chứ," cáo nói, "vì màu sắc của những cánh đồng lúa mì." Rồi nó nói thêm:

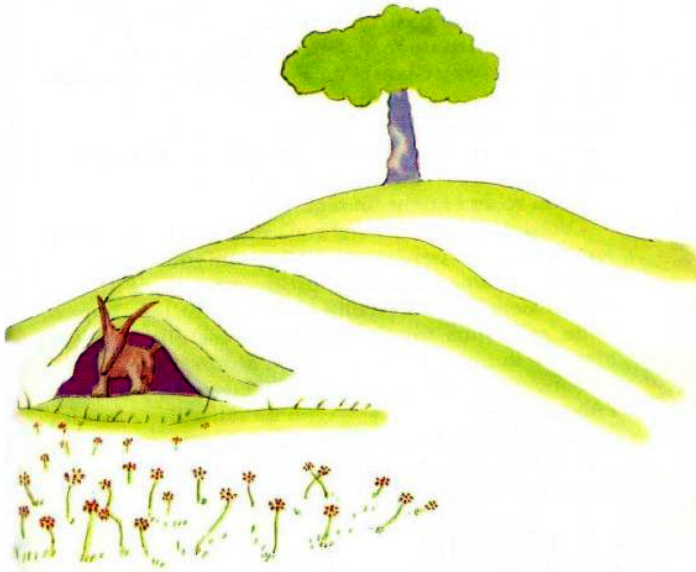
"Hãy đi đi và nhìn lại lần nữa những đóa hồng. Giờ thì bạn sẽ hiểu bông hồng của bạn là độc nhất thế gian. Rồi hãy trở lại đây để nói lời từ biệt tôi, và tôi sẽ có một bí mật để làm quà cho bạn."

The little prince went away, to look again at the roses.

"You are not at all like my rose," he said. "As yet you are nothing. No one has tamed you, and you have tamed no one. You are like my fox when I first knew him. He was only a fox like a hundred thousand other foxes. But I have made him my friend, and now he is unique in all the world."

Hoàng tử bé ra đi để nhìn lại những đóa hồng.

"Các bạn chẳng hề giống bông hồng của tôi," nhóc nói. "Hiện tại các bạn chưa là gì cả. Chưa ai thuần hóa các bạn, và các bạn cũng chưa thuần hóa ai. Các bạn giống như cáo của tôi vào lần đầu tiên tôi gặp bạn ấy. Bạn ấy chỉ là một con cáo giống muôn vàn con cáo khác. Nhưng tôi đã làm cho bạn ấy thành bạn của tôi, và giờ thì bạn ấy là độc nhất trong thế gian."



And the roses were very much embarrassed.

"You are beautiful, but you are empty," he went on. "One could not die for you. To be sure, an ordinary passerby would think that my rose looked just like you – the rose that belongs to me. But in herself alone she is more important than all the hundreds of you other roses: because it is she that I have watered; because it is she that I have put under the glass globe; because it is she that I have sheltered behind the screen; because it is for her that I have killed the caterpillars (except the two or three that we saved to become butterflies); because it is she that I have listened to, when she grumbled, or boasted, or even sometimes when she said nothing. Because she is my rose.

And he went back to meet the fox.

Và những bông hồng đã vô cùng bối rối.

"Các bạn đẹp, nhưng các bạn trống rỗng," nhóc nói tiếp. "Người ta không thể chết vì các bạn. Hẳn nhiên, một khách lữ hành bình thường sẽ nghĩ bông hồng của tôi. . . bông hồng thuộc về tôi. . . trông hệt như các bạn. Nhưng chỉ mỗi riêng nàng, nàng đã quan trọng hơn trăm vạn những đóa hồng các bạn: bởi vì nàng là đóa hồng mà tôi tưới tấp; bởi vì nàng là đóa hồng mà tôi đặt vào lồng kính; bởi vì nàng là đóa hồng tôi che chắn phía sau tấm bình phong; vì nàng mà tôi đã giết những con sâu (trừ vài ba con mà chúng tôi chừa lại để chúng trở thành bướm); vì nàng mà tôi đã lắng nghe mỗi khi nàng cầu nhàu hay khoe khoang hay thậm chí, đôi lúc, mỗi khi mà nàng chẳng chịu nói năng gì. Bởi vì nàng là bông hồng của tôi.

Rồi nhóc quay về để gặp cáo.

"Goodbye," he said.

"Goodbye," said the fox. "And now here is my secret, a very simple secret: It is only with the heart that one can see rightly; what is essential is invisible to the eye."

"What is essential is invisible to the eye," the little prince repeated, in order to remember.

"It is the time you spent on your rose that makes your rose so important."

"It is the time I spent on my rose –" said the little prince, in order to remember.

"Men have forgotten this truth," said the fox. "But you must not forget it. You become responsible, forever, for what you have tamed. You are responsible for your rose..."

"I am responsible for my rose," the little prince repeated, in order to remember.

"Vĩnh biệt," nhóc nói.

"Vĩnh biệt," cáo nói. "Và đây là bí mật của tôi, một bí mật rất giản đơn: "Ta chỉ nhìn rõ được bằng trái tim. Con mắt không trông thấy điều cốt yếu."

"Con mắt không trông thấy điều cốt yếu," hoàng tử bé lặp lại để ghi nhớ.

"Chính thời gian mà bạn đã bỏ ra cho bông hồng của bạn đã khiến bông hồng của bạn quan trọng đến như thế."

"Chính thời gian mà tôi đã bỏ ra cho bông hồng của tôi... " hoàng tử bé nhắc lại để ghi nhớ.

"Con người đã lãng quên sự thật đó," cáo nói. "Nhưng bạn thì không được quên. Ta trở nên có trách nhiệm vĩnh viễn với thứ mà ta thuần hóa. Bạn có trách nhiệm với bông hồng của bạn... "

"Tôi có trách nhiệm với bông hồng của tôi," hoàng tử bé lặp lại để ghi nhớ.

Một vài hình ảnh về các hoạt động của Sputnik



Sách Sputnik làm phần thưởng cho các học sinh, 01/2017.



Thầy Ngô Văn Minh cùng con gái đại diện Sputnik tham gia tặng sách tại bờ Hồ Hoàn Kiếm (Hà Nội) vào đêm giao thừa 31/12/2016.



Lê Bích Phượng thăm "Hùm Xám" Đặng Văn Việt (ảnh trên) và tác giả Nguyễn Thế Nghiệp (ảnh dưới) để bàn về quyển sách "Hùm Xám đường số 4" sắp xuất bản (Tủ sách Sputnik, số 030), 12/2016.



Ảnh trên: Thầy Vũ Hữu Bình cùng Sputnik. Ảnh dưới: Thầy Nguyễn Khắc Minh đến thăm và giúp đỡ Sputnik. 12/2016.



Bài giảng đại chúng của GS Nguyễn Hùng Sơn do Sputnik tổ chức tại Archimedes Academy với các chủ đề “Xung quanh phép quay” và “Trí tuệ nhân tạo”, 28/11/2016. Xem video: <https://www.facebook.com/Vietshares/videos/10209647697403098/>

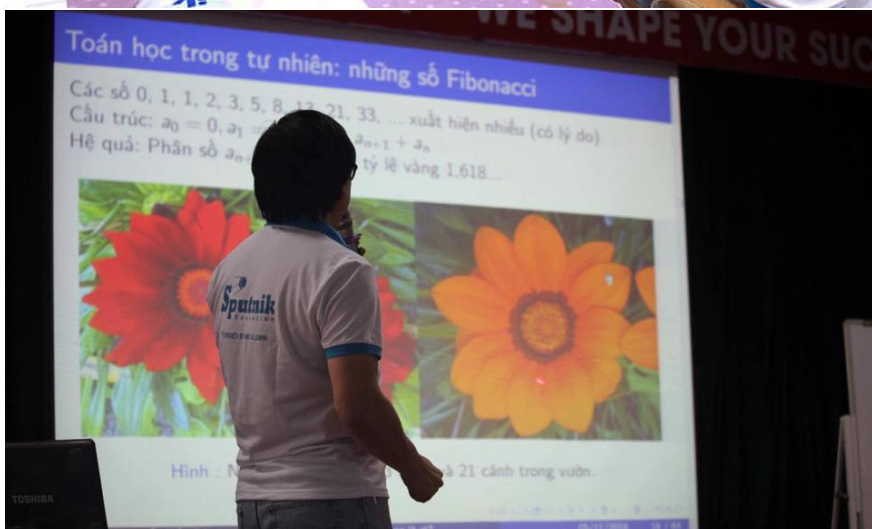


Ảnh trên: Liên hoan Sputnik, 14/11/2016. Có mặt cả các lão tướng GS. Hà Huy KHOái, GS. Đỗ Đức Thái, và đội ngũ trẻ hơn.

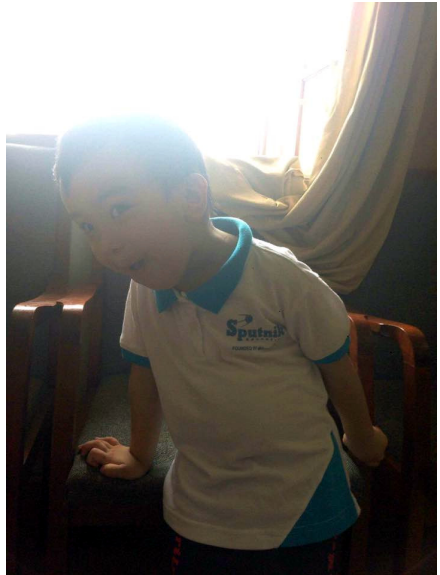
Ảnh dưới: Thăm học viện STEM, 11/2016.



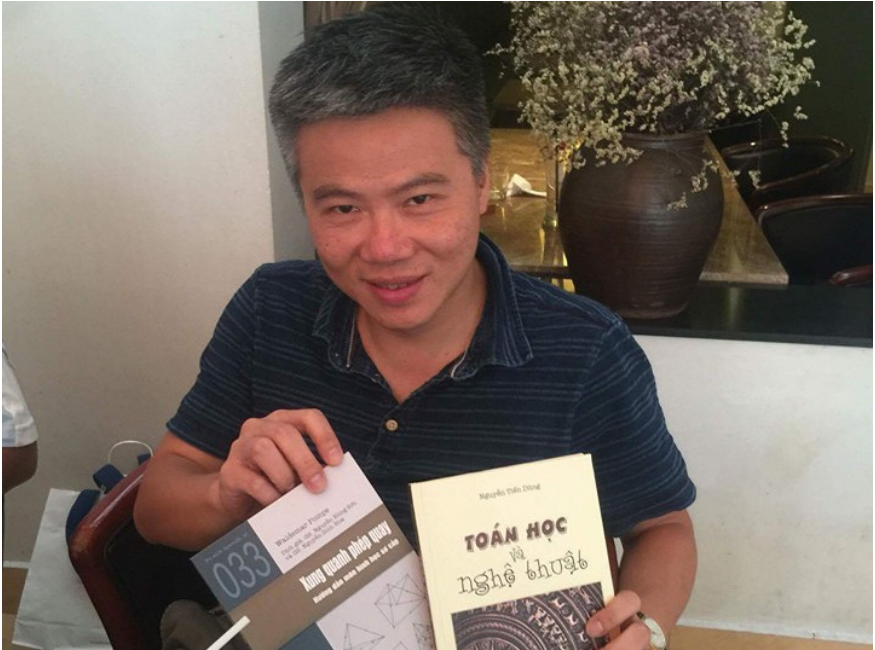
Ảnh trên: Violympic đến thăm và làm việc với Sputnik, 12/11/2016.
Ảnh dưới: Sputnik gặp gỡ các đại diện của chương trình sách hóa nông thôn, tặng 150 cuốn "Mirella 1" mới tái bản, và thỏa thuận về việc bán sách với giá ưu đãi kèm theo tặng sách cho chương trình, 29/11/2016.



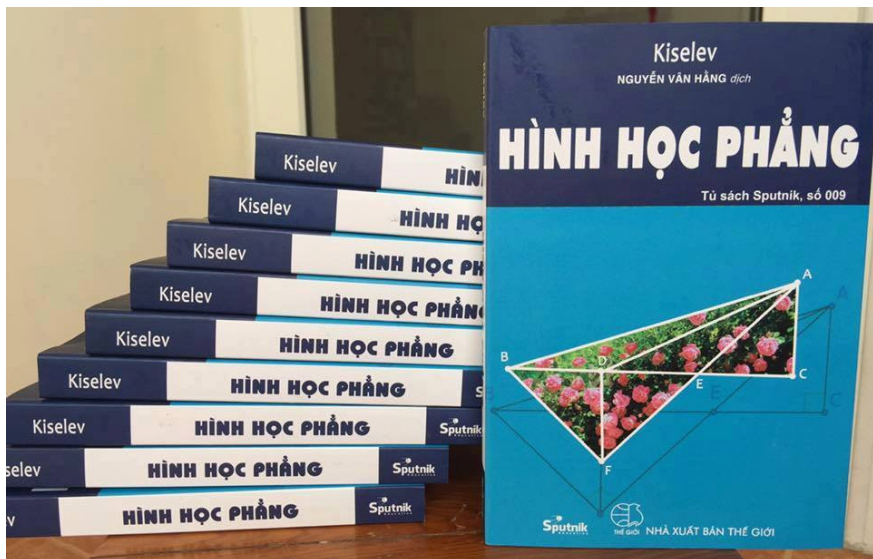
Bài giảng “Toán học là gì” của GS Nguyễn Tiến Dũng, 05/11/2016. Xem video: <https://www.youtube.com/watch?v=4wFBTiAuqe8>
Video phỏng vấn GS Nguyễn Tiến Dũng về cải cách giáo dục: <https://www.facebook.com/BBCVietnamese/videos/1360933527252719/>



Sputnik tham dự Open Day tại Viện toán Hà Nội, 16/10/2016.



GS Ngô Bảo Châu với sách Sputnik 09/2016 (ảnh trên): GS Lê Tự Quốc Thắng đến thăm Sputnik 10/2016 (ảnh dưới).



Kiselev
 Dịch giả: PHAN CÔNG CHÍNH, LÊ THỊ THU HƯƠNG,
 NGUYỄN THUY LIÊN, LÊ BÍCH PHƯƠNG

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Tủ sách Sputnik, số 031

CÔNG TY CP GIÁO DỤC SPUTNIK
 Địa chỉ: 27/81, ngõ 1, đường Nguyễn Hoàng Tôn, Xuân La, Tây Hồ, Hà Nội
 Điện thoại: 04 37501000 Fax: 04 37501007
 Email: info@sputnik.edu.vn Website: 0082 06 1246
 Shop online: http://shop.sputnik.edu.vn Website: http://sputnik.edu.vn
 Facebook: https://www.facebook.com/sputnik.edu.vn

ISBN: 978-0442-02134
 Giá: 80.000đ
 Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam

Bộ sách giáo khoa tốt nhất thế giới về hình học (10/2016). Ngoài ra Sputnik còn có 3 quyển sách hình học khác: "Bài tập hình học THCS" (S012), "Hình học tổng hợp" (S032), và "Xung quanh phép quay" (S033).