Trong số này:
Máy tính đi học!
Bí quyết của hạnh phúc!

Số 4, tháng 4 năm 2017

SPUTNIK NEWSLETTER

Số 4, tháng 4 năm 2017

SPUTNIK NEWSLETTER

Tạp chí điện tử về khoa học và giáo dục phổ thông
Liên hệ bài vở: newsletter@sputnikedu.com
Trang web: http://sputnikedu.com

Trong số này:

Thông báo Hội thảo về sách toán: Làm sao để có sách tốt cho học sinh?

Sputnik Education & Archimedes Academy

Sáng ngày thứ bảy 15/04/2017 sẽ diễn ra Hội thảo về chủ đề Sách toán cho học sinh tại trường THCS Archimedes, Hà Nội, do Sputnik Education tổ chức cùng với Archimedes Academy và với sự giúp đỡ của nhà báo Nguyễn Ngọc Diệp.

Buổi hội thảo này sẽ là một dịp để mọi người trao đổi với nhau các ý kiến một cách thẳng thắn, cởi mở nhất, đề cùng nhau rút ra kết luận cần phải làm thế nào để nâng cấp chất lượng sách toán cho học sinh ở Việt Nam sao cho phù hợp với thời đại mới, đuổi kịp thế giới trong cuộc cách mạng tự động hoá toàn cầu.

Trong số các khách mời đã nhận lời đến dự hội thảo, có nhiều người với bề dày kinh nghiệm làm sách toán cho học sinh, như là Giáo sư Đoàn Quỳnh và Nhà giáo Nhân dân Tôn Thất Thân, và nhiều người hiện đang tham gia các chương trình làm sách mới. Năm diễn giả sau sẽ trình bày tham luận về sách toán tại hội thảo:

- GS Đỗ Đức Thái: Về mô hình SGK hiện đại. (Các chức năng cơ bản của SGK và các thành tố chính của SGK).

- TS. Trần Nam Dũng: Làm thế nào để có một cuốn sách tốt? Các nguyên lý cơ bản và kinh nghiệm thực tiễn.

- GS Nguyễn Tiến Dũng: Đánh giá sách giáo khoa Toán hiện hành và đề xuất cải tiến sao cho phù hợp với thời đại mới.

- Tiến sĩ Chu Cẩm Thơ: Tiêu chí của một sách giáo khoa toán tốt.

- Nhà giáo Nhân dân Vũ Hữu Bình: sách toán cần đa dạng, phong phú, phát triển nhiều năng lực và phù hợp với từng đối tượng học sinh.

Ngoài ra, TS. Bùi Việt Hà sẽ trình bày ngắn gọn về một chủ đề liên quan: sự cần thiết dạy lập trình cho học sinh từ nhỏ.

Nhân dịp này, GS. Nguyễn Tiến Dũng, hiện đang là giáo sư mời đại Shanghai Jiao Tong Univertsity, về Việt Nam trong vòng hai ngày, cùng với Sputnik sẽ tặng sách và ký tặng sách, cùng đồ lưu niệm của Sputnik cho các khách mời và cho những người tới dự hội thảo.

Sputnik Education cùng Archimedes Academy trân trọng kính mời tất cả các nhà quản lý, nhà giáo, nhà báo và những ai quan tâm nhiều đến lĩnh vực này tới dự. Những ai muốn đến dự, xin mời đăng ký theo địa chỉ sau:

https://goo.gl/Pn6wg2

Thời gian: 8h30-11h ngày thứ bảy 15/04/2017

Địa chỉ: Hội trường của trường THCS Archimedes, phố Trung Yên 10, quận Cầu Giấy, Hà Nội.

Sách Sputnik sẽ được tặng và bán ưu đãi nhân dịp hội thảo.

Nỗi lo của phụ huynh có con học lớp 9

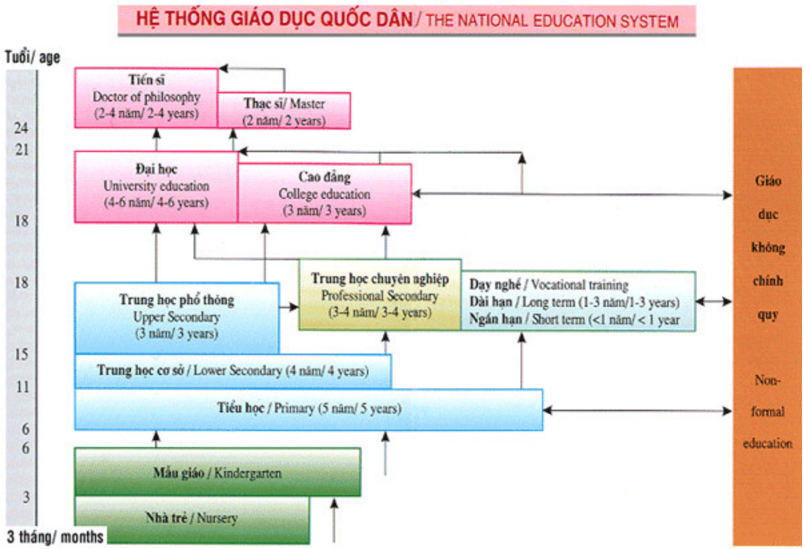
Chu Cẩm Thơ
(Pomath)

Hôm trước, tôi có được tham dự một cuộc sinh hoạt của nhóm phụ huynh ở Hà Nội. Nhiều cha mẹ trong nhóm này bày tỏ nỗi lo lắng khi con học lớp 9. Họ nói cuộc chiến vào lớp 10 của học sinh còn kinh khủng hơn cuộc chiến vào đại học. Một bà mẹ có con học lớp 9 tâm sự rằng: nếu con tôi trượt đại học, cháu có thể đi học nghề, đi học trường khác, hoặc sang năm đi thi lại. Nhưng nếu cháu không được vào lớp 10, cháu chẳng biết sẽ làm gì. Thế nên, gia đình đang tính toán để cháu học ngày đêm, mời rất nhiều giáo viên kèm cho cháu. Cháu sẽ học thuộc các bài văn mẫu, làm đi làm lại các đề để đảm bảo cháu đỗ được. Bà mẹ này còn tính rằng: cháu sẽ vào học ở một trường tốp dưới, hết học kì 1, gia đình sẽ tính kế để chuyển trường tốt cho con.

Rời khỏi cuộc thảo luận của nhóm này, tôi có làm một khảo sát với hàng xóm của mình. Kết quả tương tự, cha mẹ có con học lớp 9 hầu hết đều nghĩ rằng việc không được vào trường tốt để tiếp tục học 10 sẽ kết thúc sự nghiệp học tập và khả năng vào cuộc sống của con cái họ.

Có thật không vào được lớp 10 là dấu chấm hết cho việc học của con trẻ?

Trong sơ đồ hệ thống giáo dục quốc dân của Việt Nam, học sinh học xong trung học cơ sở có thể tiếp tục học THPT hoặc học nghề tại các trường Trung cấp chuyên nghiệp. Ngoài ra, các em cũng được học tập không chính quy tại các cơ sở giáo dục thường xuyên. Dù học trong loại hình giáo dục nào thì học sinh cũng được quyền học lên các bậc cao như cao đẳng, đại học hay học tập tiếp tục theo nhu cầu của bản thân.



Hiện trạng phụ huynh chỉ muốn con vào trường THPT đã dẫn đến sự quá tải trong học tập, học không đúng cách, tốn kém tiền của và những sai lầm trong hệ thống. Chẳng hạn, các trường học tốp đầu luôn quá tải, số lượng học sinh cao hơn mức cho phép. Tâm lí học lớp kém, trường kém khiến cả nhà giáo dục và học sinh, phụ huynh đều tiêu cực, không tự tin trong giảng dạy và xác định mục tiêu của nhà trường. Trường tốp dưới được coi là chỗ trú chân của những học sinh con nhà “có điều kiện”, để từ đó họ có thể xin chuyển sang trường cao hơn.

Điều đáng lo lắng là tâm lí thi cử, cố học bằng được đã dẫn đến học sinh phải học bằng những cách học sai lầm. Một phụ huynh chia sẻ rằng, con chị phải thức đến 2 giờ sáng để học thuộc lòng văn mẫu, làm hàng trăm đề kiểu "nhai đi nhai lại" đến thuộc.

Cả khoa học lẫn thực tế đều cho thấy, việc luyện thi để đỗ có thể giúp học sinh đạt được mục tiêu thi cử nhưng không có mấy ý nghĩa với việc học của họ. Học thuộc lòng thì thường dễ quên. Việc muốn con được điểm cao khiến cha mẹ nghĩ đến nhiều kĩ thuật: bắt con đi học thêm, nhờ vả giáo viên, ...Dẫn đến, đứa trẻ không học được những kiến thức, kĩ năng cần thiết. Việc học thụ động lâu ngày, lại đúng vào thời điểm trẻ hoàn thiện tâm lí sẽ để lại nhiều hậu quả nghiêm trọng như: trẻ dễ mắc những hội chứng tâm lí căng thẳng, sợ học, học đối phó, lớn lên, trẻ không học được cách học thì khó có thể học lâu dài, ...

Có thể quẳng gánh lo đi được không?

Các phụ huynh chia sẻ rằng, để chắc chắn được vào trường tốt họ sẽ giúp con được danh hiệu học sinh giỏi toàn diện (sẽ được cộng điểm). Vì thế học sinh có áp lực học thêm để được điểm cao từ năm lớp 6. Nếu việc học thực, học có giá trị và cách học phù hợp thì học càng sớm càng tốt. Nhưng từ sớm mà đã phải học đối phó, dẫn thành thói quen và nhân cách thì thực nhiều hệ lụy. Một phụ huynh đã chia sẻ thẳng thắn rằng chị không bao giờ đánh đổi nhân cách, khả năng học thực của con lấy điểm số. Vì thế, chị chấp nhận con được học lực trung bình, nhưng cháu học chủ động. Khi thi, cháu vẫn làm bài được như các bạn, và giờ cháu đã trở thành sinh viên trường Luật. Chị lại tiếp tục áp dụng cách đó cho cô con gái thứ hai của mình. Chị nói, chẳng bao giờ cách học thuộc lòng lại giúp con thi được điểm cao và học tiếp bền vững được. Mặt khác, khi con biết cách học, học có kiến thức thật sự, thì đề ra kiểu gì con cũng làm được đúng sức mình.

Tôi cũng có một phụ huynh, anh cho con học hệ thường xuyên vì cháu rất yêu khiếu thể thao và sợ học các môn cơ bản. Nhưng khi học hệ thường xuyên, cháu không bị áp lực, thì lại được kết quả khá tốt (so với mong đợi của gia đình). Cháu tự học được và vui vẻ thể hiện với các bạn. So với các bạn cùng cấp hai ngày trước, cháu có sự tiến bộ rõ rệt nhất. Cháu tự tin và có trách nhiệm với việc học tập, khá chủ động trong công việc cá nhân của mình. Cũng có nhiều trường hợp, các học sinh đã theo học nghề từ khi học xong lớp 9. Ngoài việc phù hợp với điều kiện của bản thân, tiết kiệm kinh tế, công sức, thì vẫn có rất nhiều gương mặt thành công, tiếp tục học để khẳng định bản thân sau này.

Trong vốn kinh nghiệm của mình, tôi có gặp không ít trường hợp vì bố mẹ cứ cố cho con học trường tốt (chuyên, chọn) mà không chú ý rèn cho con cách học nên các cháu càng ngày càng thui chột. Cháu học kém, không tự tin về bản thân. Mặc cảm học không đúng sức mình đã làm các bạn không hòa nhập được với cộng đồng dẫn đến bị trầm cảm. Vì vậy, cha mẹ có con học lớp 9 đừng gây căng thẳng cho việc học của con. Thời điểm này đúng là rất quan trọng nhưng nó không phải là con đường duy nhất. Lứa tuổi này, các con vẫn cần rèn luyện một sức khỏe tốt, học cách học và khám phá nhu cầu bản thân, định hướng tương lai từ việc học. Cha mẹ có thể bàn bạc, cùng con tìm hiểu những cách học tốt, bên cạnh rèn luyện thân thể và thư giãn hợp lí. Hơn hết, cha mẹ tìm thấy những ngã rẽ phù hợp, vừa sức với con, tin tưởng rằng, con đường tốt, cách đi hợp lí mới là thứ con cần được người lớn định hướng.

Toán điều khiển vũ trụ hay vũ trụ tạo ra toán?

Phạm Hi Đức

GS. Phạm Hi Đức hiện là chủ nhiệm chương trình Thạc sĩ Toán tài chính của một trường kỹ sư tại Paris, và viện John Von Neumann (ĐHQG TP HCM); chủ tịch HĐKH chương trình Fmatlab của VIASM. Từng là kỹ sư trí tuệ nhân tạo, vụ trưởng tín dụng quốc gia, giao dịch viên sàn chứng khoán, giám đốc tư vấn ở PricewaterhouseCoopers, đặc nhiệm bộ Thanh tra ngân hàng Pháp ở Basel...

« **Mundum regunt numeri** » Euler đã từng quan niệm là thế giới bị các con số quản lý. Vậy sao? Có thể nào quan điểm ngược lại, là toán bị dẫn dắt bởi vật lý thiên nhiên, gồm cả con người nữa, mới là đúng sự thật ?

Mặc dù Toán là môn trừu tượng và tìm kiếm cái luật vô hình đằng sau cái hữu hình, không ai phủ nhận được là rất nhiều khái niệm toán bắt nguồn từ đời sống hàng ngày. Chiêm tinh và kiến trúc đã khiến người Ai Cập và người Ba Bi Luân khai phá hình học. Và nghiên cứu máy móc bằng cơ học đã giúp cuộc Cách mạng Công nghệ của thế kỷ 17 cho chúng ta giải tích vi phân.

Trong thuyết lượng tử, những khái niệm toán học tiềm ẩn rất mạnh mẽ, mặc dù hàng ngày người ta không trải nghiệm được các hạt phân tử. Trong thế giới kỳ lạ của lượng tử, các vật thể thể hiện như là ở hai hay nhiều nơi cùng một lúc. Chỉ có sức mạnh của toán xác suất có thể diễn tả sự việc này. Không những toán trong tình huống này là một cách mô tả thiên nhiên một cách đầy đủ và thích ứng hơn tất cả các cách trước đây, mà ngược lại, vật lý lượng tử lại còn đem lại cho toán những thách thức rất bao quát và sâu xa để tiếp tục được khai triển. Các nhà nghiên cứu hy vọng khi ta hiểu và thấm nhuần cấu trúc thống nhất của thuyết lượng tử, nó sẽ giúp khai phá một ngành toán mới, « toán lượng tử ».

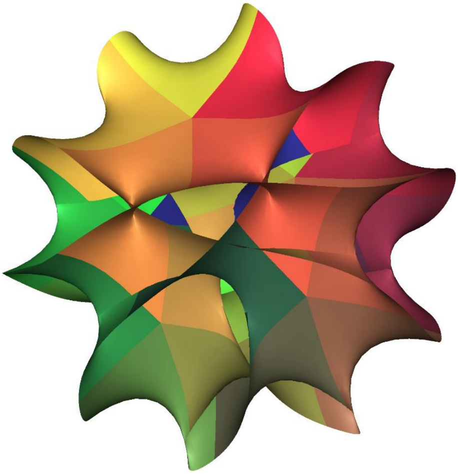
Trong vật lý cơ học cổ điển, người ta tính sự chuyển động của một thể vật đi từ điểm A đến một điểm B. Ví dụ, chuyển động sẽ đưa vật đó đi qua tất cả các điểm trên một quỹ đạo « tối ưu », một đường trắc địa (geodesic), theo một lộ trình ngắn nhất trong vũ trụ chứa đựng hai điểm đi và đến. Nhưng với khái niệm lượng tử thì khác. Thay vì chỉ một đường quỹ đạo, vật lý lượng tử xét toàn thể tập hợp của tất cả các lộ trình khả thi đi từ A, mặc dù nó dài hơn hay khúc khuỷu hay ngoặt ngoẹo hay vòng qua nửa vũ trụ trước khi bay về điểm B. (Đây là cái, mà nhà vật lý Richard Feynman ám chỉ qua cụm từ « tổng số các lịch sử »). Sau đó, theo cách tính toán của định luật lượng tử, mỗi lộ trình sẽ được phân cho một tỷ trọng diễn tả xác suất của là vật thể ta đang theo dõi, sẽ « chọn » bay theo lộ trình ấy. Như thế, phương án thường ngày ta gặp qua vật lý của Newton chỉ giản đơn là một phương án có xác suất cao nhất trong tất cả, chứ không phải phương án độc nhất. Cách nhìn vũ trụ như vậy, có thể rất phong phú về mặt triết lý, nhưng nó đem gì cụ thể cho toán học ? Ta hãy xem hai ví dụ sau đây.

Sự kiện I : Sự bất ngờ khi tính toán số đường cong độ N trong không gian Calabi-Yau

Lý thuyết dây là một thuyết hấp dẫn lượng tử, được xây dựng với mục đích thống nhất tất cả các hạt cơ bản cùng các lực cơ bản của tự nhiên, ngay cả lực hấp dẫn (theo Wiki tiếng Việt). Theo thuyết này, vạn vật trong nằm trong một vũ trụ không phải 3 chiều, mà 6 chiều hệ quả khi giải các phương trình hấp dẫn của Einstein. Các đáp án của các phương trình đó là những không gian gọi là Calabi-Yau, trong đó các chiều thặng dư ngoài 3 chiều quen thuộc được « cuộn » lại rồi « cất giấu » trong các hóc hiểm của không gian này.

Từ thế kỷ 19, người ta chứng minh rằng trong không gian Calabi-Yau đơn giản nhất, gọi là quintic, ta đếm được tổng số đường cong độ 1 (các đường thẳng) là 2875. Mãi đến năm 1980 người ta mới tính ra số đường cong độ 2 là 609 250. Năm 1990, một nhóm nhà vật lý chuyên về Thuyết dây cộng tác với các nhà toán hình học để tính số đường cong độ 3. Các chuyên gia hình học nghĩ ra một thuật toán và thiết kế một lập trình phức tạp để tính. Khi họ đưa con số cho các nhà vật lý, thì con số bị các nhà vật lý cho là sai. Khi kiểm tra lại, quả nhiên trong lập trình có nhầm lẫn. Nhưng sao các nhà vật lý lại « đón đầu » được các nhà hình học nhỉ ? Trong cộng đồng khoa toán, tất cả bị sốc khi khám phá ra là thách thức đếm trong không gian Calabi-Yau đã được các nhà vật lý giải đáp, không những đến độ 3, mà cả đến độ N bất kỳ, họ cũng tìm ra cách tính.

Lý do là các nhà vật lý đã chuyển bài toán hình học thành một bài toán vật lý lượng tử. Do đó tất cả các độ N, (cũng như các sóng đứng với một số bất kỳ N điểm nút đều tuân theo một phương trình duy nhất) đã được phối hợp vào một phương trình tổng thể, mô tả làn sóng lan truyền qua không gian Calabi-Yau, và các nhà vật lý đã áp dụng phương thức giải theo cách « tổng số các lịch sử » nói trên. Mô hình một « dây », nhưng rung động theo các đường cong với tất cả các « độ » trong cùng khoảng khắc, đã là một ví dụ mà vật lý tạo ra một « ngành » toán cá biệt với tất cả định lý, chứng minh, đáp án, thuật toán của nó. Đây cũng là một trường hợp ứng dụng của « máy tính lượng tử » (quantum calculator)



Một không gian Calabi-Yau giản dị nhất : quintic (hình do wikipedia)

Sự kiện II : Độ cong của không gian và vật lý tương đối

Một ví dụ khác đã thể hiện giữa hình học và vật lý từ lâu đời hơn : đó là khi các phương trình của Einstein về sức hấp dẫn của các vật thể thiên văn tương đương với bài toán hình học mô tả chuyển động trên một mặt cong. Cái đối xứng giữa vật lý (sức hấp dẫn) và hình học (mặt cong không gian) khó chấp nhận cho những ai nghĩ là vũ trụ vật chất chỉ có một thực tế, và do đó chỉ có một cách độc nhất diễn tả qua toán.

Không kém khó hiểu là sự đối xứng giữa một hạt phân tử và hàm sóng của nó. Ngay từ đầu thế kỷ trước, các nhà vật lý học đã không ngớt tranh luận về cái nghĩa sâu xa của các phương trình chính họ đã khám phá ra : Niels Bohr, Wolfgang Pauli, Max Planck, Louis de

Broglie ... Con mèo (chết hay không chết) của Schrödinger, sự đo đạc chính xác không thể đạt, của cả vận tốc và vị trí cùng một lúc, của một vật theo định luật Heisenberg, tính cách của các phân tử, vừa là vật chất vừa là làn sóng di chuyển theo Loúi De Broglie ... bấy nhiêu trường hợp mà 2 loại toán khác nhau tìm thấy sự đối xứng lẫn nhau nhờ xuyên qua cùng một thự tế vật lý.

Tóm lại, qua các lý thuyết lượng tử và tương đối, ta thấy toán và vật lý giúp nhau luân phiên đặt câu hỏi và đem đến cách giải.

* * *

Trong lãnh vực cổ điển hơn, ta cũng có tình trạng có hai hệ thống toán mô tả một thực tế hiện hữu duy nhất. Và ta cũng có một hình thức « tổng số các lịch sử » để tính ra con đường tối ưu. Cột trụ quan trọng của kết nối giữa toán và cơ học này là phép tính biến phân (Variational calculus).

Một cách hiểu toán biến phân là hoán chuyển các hàm số thực lên các « hàm của hàm số ». Toán biến phân là cách « tính đạo hàm » trên những hàm f (thí dụ giá du lịch) của các hàm u để kiếm ra những đáp án u* là hàm số tối ưu hoá hàm f.

Chẳng hạn giữa 2 điểm A và B ở toạ độ x1 và x2 ta kiếm tất cả các hàm số y(x), có đạo hàm bậc 2 liên tục. Ta kiếm hàm y* (lộ trình, kể cả cách điều hoà vận tốc y'*) tối thiểu hoá giá của cuộc du lịch gồm chi phí xăng, chọn đường dài ngắn, lái nhanh lái chậm v.v. . .

Nếu f là một hàm tối ưu hoá J thì ta có phương trình gọi là Euler-Lagrange :

Tại đây ta tìm thấy điểm liên kết tất cả những gì chúng ta bàn về « tổng số các lịch sử » trước : Phương trình Euler-Lagrange xem xét tất cả các « lịch sử » (khi x là thời điểm) hay nói cách khác, các « quỹ đạo » hay « lộ trình » $f(x)$ (khi x là toạ độ), nhích từng ly từng tí dx trên mỗi lộ trình $f(x)$ và xét soi xem cái giá phải trả L khi ta thay đổi một chút hàng ngang ∂f có được đền bù bằng một một lợi thế $d(\partial L/\partial f')$ về hàng dọc không ? Khi mà tại mỗi toạ độ x điều kiện này thoả, thì tập hợp tất cả các điểm x chính là lộ trình tối ưu.

Chỉ nhận xét sơ sơ qua, ta thấy vật lý dựa trên toán biến phân này, là một loại tư duy nhìn tổng thể tất cả cục diện (tất cả các biến khả thi) rồi mới tim ra tối ưu. Nó khác vật lý Newton, chỉ chú trọng vào từng vị trí một, từng véc tơ lực trong một thời điểm đứng, không liên quan gì đến lúc trước lúc sau của thời điểm đó.

Khi vào lãnh vực kinh tế tài chính, chúng ta cũng có ứng dụng của phương trình Euler-Lagrange. Nó diễn tả tình trạng tiêu thụ tối ưu, khi khoản vốn mà chúng ta để dành vào đầu tư (bằng cách nhịn tiêu xài hôm nay), sẽ đem đến ngày mai sự hài lòng trong đúng tỷ lệ mà ta chịu thiệt hôm nay.

Trong cuộc đời chúng ta, có dễ tính toán như trong toán học không ? Có thể dùng phép tính biến phân mà chi li từng giây phút, mình tự mặc cả với chính mình để phân chia sự thụ hưởng hôm nay với sự trả giá ngày mai cho đến cuối đời một cách tối ưu không ?

Việc đó đòi hỏi ta nhìn được suốt tương lai cuộc đời, như một tờ giấy báo trải dài dưới mắt, và có khả năng nhìn các việc quá khứ hiện tại vị lai cũng rõ ràng minh bạch như nhau. Nghĩa là ta làm chủ được thời gian . . .

Cách đây một số Sputnik, tôi biên một bài về cách Toán học trình bày thời gian (qua Emile Borel, Kolmogorov, và Nicole El Karoui). Bài đó nhấn mạnh về thời gian được xây dựng trong toán học như một chuỗi sự kiện, mà phần nằm trong tương lai ta chỉ tiếp nhận được qua những xác suất của nó.

Đăng xong thì tôi đi xem phim viễn tưởng mới ra « Arrival » (« Cuộc đổ bộ bí ẩn »). Xem xong, xúc động mạnh vì chuyện tình cảm mẹ con trong đó lồng vào câu hỏi « nếu bạn biết sinh con, mà khi nó đến 17 tuổi, nó sẽ bỏ bạn mà đi một cách thảm thiết, thì bạn có sinh con không ? ». Câu chuyện nảy ra ngay từ cách dựng phim, ngay 5 phút đầu (tôi không spoil phim đâu) vì người ngoài hành tinh đem đến một cách vượt thời gian khá bất ngờ. Cách đặt vấn đề thời gian vừa đưa đến kết quả trái ngược với cách tôi trình bày trong bài báo Sputnik, mà cũng lại hoàn toàn … phù hợp với nó !

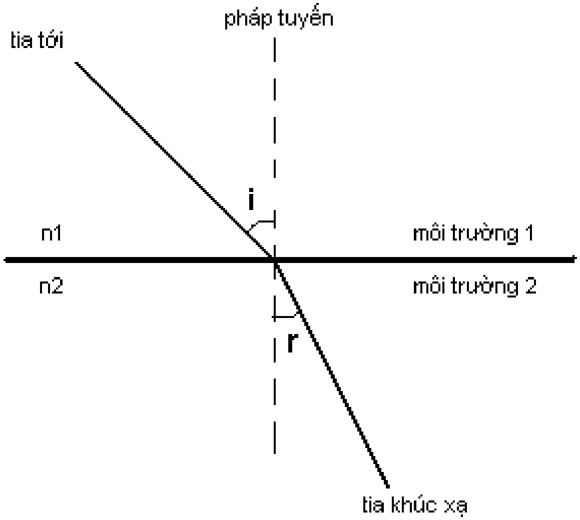
Nhắc lại, định nghĩa thời gian, theo ngành Giải tích ngẫu nhiên ứng dụng vào tài chính, đã được xây ra để diễn tả từng chuỗi các sự kiện khả dĩ đo được (theo nghĩa có thể phân định một « measure » trên tập hợp đó), để một mặt, ta ước lượng các xác suất của các sự kiện tương lai, mặt khác, khi thời điểm hiện tại biến tương lai thành quá khứ, dần dà khắc vào đồng vào đá, các sự kiện quá khứ để không ai thay đổi được. Như vậy thì rõ ràng, ai làm sao đi ngược dòng thời gian được ? Hệ quả tất yếu là không ai biết được tương lai.

Thế mà trong thiên nhiên quen thuộc của chúng ta có những sự việc cứ như là có những thể vật biết trước tương lai chúng sẽ ra sao : Nhìn nước mưa chảy trên một mặt dốc khúc khuỷu, để ý mà xem, nó sẽ luôn luôn chảy theo đường ngắn nhất đến cùng, mặc dù đôi khi lúc đầu dòng nước có vẻ đi theo một con đường khác hơn là theo độ dốc nhất. Làm sao mà nó biết, trước khi chảy đến chân mặt dốc ở thời điểm $t = T$, nó sẽ phải tối thiểu hóa

?

Phim đem cho tôi một cơn nóng lạnh vì nhận diện vấn đề này. Tôi đã phải bỏ 5€mua cuốn sách căn bản của phim trên Amazon, và thích thú khi biết tác giả Ted Chiang đã có bằng Computer Science của Brown. Chuyện trong sách có nhiều trang để đi vào chi tiết, đặt vấn đề dơn giản hơn với sự kiện tia ánh sáng khúc xạ khi chiếu từ không khí vào trong nước. Làm sao nó biết phải theo định luật Snell

Và định luật này là một hệ quả tất yếu của việc con đường đi của tia sáng là con đường ngắn nhất, và nó cũng đi từ phép tính biến phân đã đề cập trên kia.



Con người và giọt nước khác và giống nhau thế nào ? Toán học có cho ta câu trả lời không ?

Theo tôi, và trên căn bản các điều trình bày đoạn trên, toán học đơn độc thì không thể, nhưng toán với kinh tế và vật lý thì rất có thể có . . .

MÁY TÍNH ĐI HỌC
Giới thiệu lý thuyết học máy

Nguyễn Hùng Sơn

GS. Nguyễn Hùng Sơn là chuyên gia về trí tuệ nhân tạo, giáo sư toán và tin học tại Đại học Tổng hợp Warszawa, Ba Lan. Giáo sư Nguyễn Hùng Sơn cũng là người hướng dẫn và chấm thi các đội tuyển toán olympic của Ba Lan, và là dịch giả (cùng với GS. Nguyễn Sinh Hoa) của quyển sách rất hay nhan đề "*Xung quanh phép quay - Hướng dẫn môn hình học sơ cấp*" của W. Pompe (Tủ sách Sputnik Số 033).

Giới thiệu: Bài toán phân lớp (classification problem) là một trong các vấn đề phổ biến nhất, thường xuyên được nhắc đến trong lĩnh vực học máy (Machine Learning). Các thuật toán phân lớp đều sử dụng một số hữu hạn các ví dụ mẫu để xây dựng mô hình. Vì vậy đó là các ứng dụng của phương pháp suy luận quy nạp trong học máy. Chúng ta sẽ làm quen với một lý thuyết liên quan đến xác suất thành công trong bài toán phân lớp, số lượng tối thiểu các ví dụ mẫu, độ phức tạp của không gian giả thuyết, độ chính xác của thuật toán phân lớp, và cách chọn lựa các ví dụ mẫu.

4.1 Suy luận quy nạp

Suy luận quy nạp là cách suy luận nhằm rút ra các kết luận chung, tổng quát dựa vào một số hữu hạn các quan sát cụ thể. Quy nạp toán học là một ví dụ của phương pháp suy luận quy nạp. Để chứng minh mệnh đề $\Phi(n)$ luôn đúng với mọi số nguyên dương n bằng phương pháp **quy nạp hoàn toàn**, ta phải chứng minh 2 điều sau đây:

(QN1) Kiểm tra xem $\Phi(n)$ có đúng không với một số trường hợp đầu tiên ($\Phi(1)$, $\Phi(2)$ ...).

(QN2) Chứng minh rằng với mọi n, nếu $\Phi(n)$ đúng thì $\Phi(n+1)$ cũng đúng.

Nếu chỉ thực hiện bước (**QN1**) thì ta gọi đó là **quy nạp không hoàn toàn**. Trong trường học chúng ta thường được dạy rằng để chứng minh các định đề toán học, ta không được dùng phương pháp quy nạp không hoàn toàn. Ví dụ nếu muốn chứng minh đẳng thức:

$$\Phi_1(n): \ 1^2 + 2^2 + \dots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

mà ta chỉ kiểm tra xem $\Phi_1(n)$ có đúng với một số giá trị nguyên dương n không. Ví dụ: $\Phi_1(1) : 1 = 1; \Phi_1(2) : 5 = 5; \Phi_1(3) : 14 = 14; \Phi_1(4) : 30 = 30$.

Nếu từ đó ta khẳng định rằng $\Phi_1(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n thì tất cả các thầy cô đều sẽ đánh giá đây là lời giải không đầy đủ. Trong thang điểm 10, lời giải này có lẽ chỉ được cùng lắm là 2 điểm. Tuy nhiên, chúng ta hãy thử phúc khảo lại lời giải trên xem sao. Gọi $L(n)$ và $R(n)$ lần lượt là vế trái và vế phải của $\Phi_1(n)$. Không cần tính toán ta cũng thấy rằng $L(n+1) - L(n)$ và $R(n+1) - R(n)$ là các đa thức bậc 2, hơn nữa hai đa thức này bằng nhau tại 3 điểm từ đó suy ra chúng đồng nhất bằng nhau. Từ đó suy ra $L(n) = R(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Thực ra, chỉ cần kiểm chứng sự đúng đắn của $\Phi_1(n)$ với 4 giá trị bất kỳ khác nhau của n, ta có thể khẳng định $\Phi_1(n)$ luôn đúng[1]. Vì vậy lời giải dùng quy nạp không hoàn toàn có lẽ cũng xứng đáng được nhận 6-8 điểm trên 10.

Ta để ý rằng phương pháp trên cũng có thể áp dụng với các bài toán tương tự, ví dụ:

$$\Phi_2(n) : 1^3 + 2^3 + \ldots n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Tuy nhiên, định đề $\Phi_2(n)$ liên quan đến đa thức bậc 4, vì vậy ta phải dùng phương pháp quy nạp không hoàn toàn để kiểm chứng với 5 giá trị khác nhau của n.

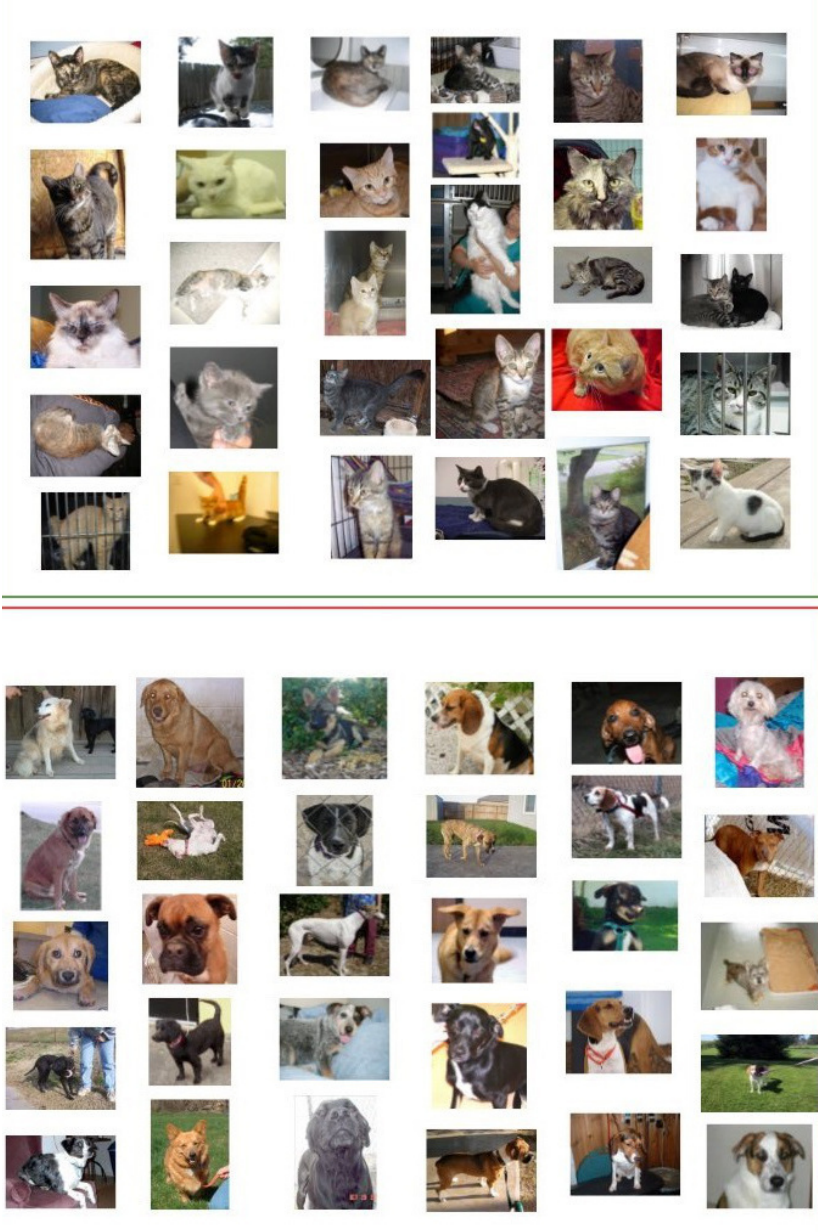
Phương pháp quy nạp không hoàn toàn chỉ có thể sử dụng để chứng minh các bài toán nếu có thể đưa chúng về vấn đề đa thức bằng nhau. Vì vậy, nếu gặp các định lý dạng:

$\Phi_3(n)$: phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên $\forall\ n > 2$

thì phương pháp quy nạp không hoàn toàn sẽ gặp bế tắc.

Phương pháp quy nạp không hoàn toàn cũng thường xuyên được áp dụng trong rèn luyện và sự phát triển trí tuệ của con người. Các em bé có thể hiểu các khái niệm trong ngôn ngữ tự nhiên như "cái bàn", "cái ghế", "con mèo", "con chó", ... rất nhanh mà không cần các định nghĩa chính xác kiểu từ điển bách khoa toàn thư. Chỉ qua một vài ví dụ, các em bé có thể dễ dàng nhận biết các đồ gỗ mới xem đâu là cái bàn, hoặc cái ghế. Các em cũng dễ dàng phân biệt hình vẽ con mèo với con chó chỉ qua một vài đặc điểm nhỏ mà nhiều khi người lớn không nhận ra.

[1]Nếu ta biết rằng cả hai vế là đa thức bậc 3, thì để kiểm tra chúng bằng nhau, chỉ phải kiểm tra cho 4 giá trị khác nhau của biến số.



Một số ví dụ luyện tập của bài toán phân biệt ảnh chụp các chú mèo và chó trong Kaggle DataSet.

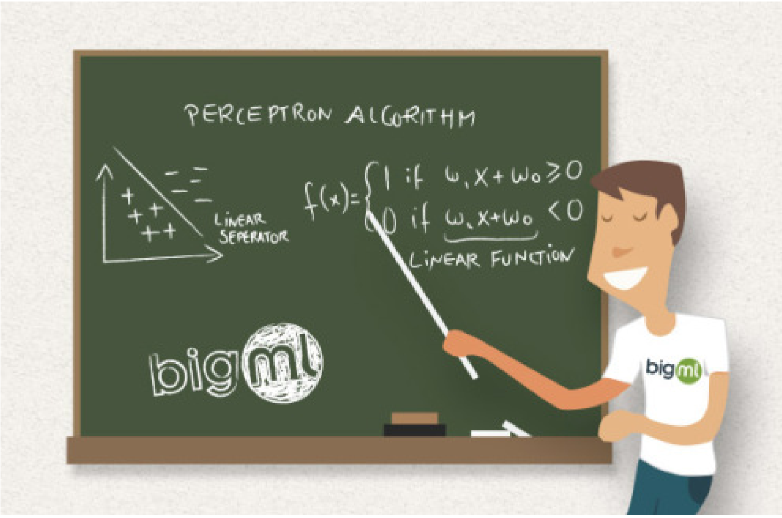
Vì vậy lý thuyết học máy coi bài toán nhận biết khái niệm (concept learning) là bài toán lâu đời và có ý nghĩa quan trọng nhất. Các nhà khoa học luôn tìm cách mô phỏng trí tuệ con người để tìm ra các phương pháp nhận biết khái niệm hiệu quả nhất dựa trên một số lượng hữu hạn các ví dụ luyện tập. Trong rất nhiều ứng dụng thực tế, máy móc đã vượt được con người về khả năng nhận biết khái niệm, ví dụ như các hệ thống nhận dạng chữ viết tay.

Trong bài báo nhỏ này chúng ta sẽ không bàn về các phương pháp nhận biết khái niệm, vì đó là một khối lượng đồ sộ các tài liệu, đủ để soạn giáo trình cho một năm học gồm hơn 30 bài giảng. Thay vào đó, chúng ta sẽ làm quen với lý thuyết học máy nhằm giải thích khả năng thành công hoặc thất bại của bài toán nhận biết khái niệm. Cũng giống như bậc của đa thức ảnh hưởng đến độ phức tạp của phương pháp chứng minh quy nạp không hoàn toàn, chúng ta sẽ tìm ra một khái niệm tương tự để đánh giá độ phức tạp của không gian các khái niệm. Lý thuyết học máy sẽ giúp ta tìm xác suất thành công trong bài toán phân lớp, số lượng tối thiểu các ví dụ mẫu, độ chính xác của thuật toán nhận biết khái niệm, và cách lựa chọn các ví dụ mẫu trong quá trình luyện tập.

4.2 Nhận biết các khái niệm mẫu

Xét tập hợp $\mathcal{X}$ gồm (hữu hạn hoặc vô hạn) các trường hợp hay còn gọi là các đối tượng (objects), các trường hợp (instances) hoặc các ví dụ (examples). Mỗi tập con $S \subset \mathcal{X}$ có thể coi là một khái niệm của $\mathcal{X}$. Ví dụ $\mathcal{X}$ có thể là tập các đồ vật trong nhà còn khái niệm "cái bàn" tương ứng với tập con $S \subset \mathcal{X}$. Mỗi khái niệm S cũng tương ứng với một hàm nhị phân $f_S : X \to \{0,1\}$.

Giống như trường học của con người, lý thuyết học máy cũng có hai nhân vật là giáo viên và học sinh (xem hình minh hoạ phía dưới). Giáo viên sử dụng các khái niệm thuộc tập $\mathbb{C} \subset \{0,1\}^{\mathcal{X}}$, còn gọi là *không gian các khái niệm*[1]. Học sinh sử dụng các khái niệm thuộc tập $\mathbb{H} \subset \{0,1\}^{\mathcal{X}}$, còn gọi là *không gian các giả thuyết*. Trong một số trường hợp $\mathbb{H}$ không nhất thiết phải bằng $\mathbb{C}$.



Hình 1: Giáo viên trong trường học máy.

Thường giáo viên sẽ chọn một khái niệm $c \in \mathbb{C}$ và học sinh sẽ phải tìm một giả thuyết $h \in \mathbb{H}$ nào đó sao cho h và c gần giống nhau nhất. Để làm điều đó học sinh sẽ được nhận một tập các ví dụ mẫu, ở đây mỗi ví dụ mẫu là một cặp $(x, c(x))$ trong đó $x \in \mathcal{X}$ và $c \in \mathbb{C}$. Các ví dụ mẫu phải được lựa chọn một cách ngẫu nhiên từ tập $\mathcal{X}$ theo

[1] $\{0,1\}^{\mathcal{X}}$ là ký hiệu của tập hợp tất cả các hàm số nhị phân từ $\mathcal{X}$ vào $\{0,1\}$.

một phân phối xác suất D nào đó trên tập $\mathcal{X}$. Chính xác hơn, tập các ví dụ mẫu, hay còn gọi là tập huấn luyện (training set) là một tập hữu hạn gồm:

$$S = \{(x_1, c(x_1)), (x_2, c(x_2)), \ldots, (x_m, c(x_m))\}$$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các ví dụ được chọn ngẫu nhiên từ $\mathcal{X}$. Họ các tập huấn luyện gồm m phần tử cho khái niệm c được ký hiệu là $\mathcal{S}(m, c)$.

Để xác định độ chính xác của giả thuyết h so với khái niệm c, ta cần phải tìm độ sai lệch (lỗi):

$$Error_c(h) = P_D(h \neq c) = P_D(\{x \in \mathcal{X} : h(x) \neq c(x)\}),$$

trong đó P_D là ký hiệu xác suất (theo phân phối xác suất D). Tuy nhiên trong trường hợp $\mathcal{X}$ là tập vô hạn hoặc hữu hạn nhưng chứa rất nhiều phần tử thì xác suất trên có thể được tính xấp xỉ nhờ tập các ví dụ thử nghiệm (test set) T. Lưu ý rằng cả tập huấn luyện S lẫn tập thử nghiệm T đều được lựa chọn ngẫu nhiên từ $\mathcal{X}$ theo phân phối xác suất D. Lúc đó

$$Error_c(h) \approx Error_T(h) = P_T(h \neq c) = \frac{|\{x \in \mathcal{X} : h(x) \neq c(x)\}|}{|T|}$$

4.3 Học giỏi = học có lẽ gần như chính xác (PAC learning)

Trong chương này chúng ta sẽ định nghĩa thế nào là một thuật toán tốt học nhận biết các khái niệm. Nói nôm na thì ta có thể hiểu rằng đó là những thuật toán có khả năng tìm ra giả thuyết có độ sai lệch nhỏ tùy ý với xác suất lớn tùy ý. Tất nhiên, để tăng xác suất đạt kết quả tốt và giảm độ sai lệch thì phải tăng số phần tử trong tập huấn luyện. Những thuật toán như vậy sẽ được gọi là "*có lẽ gần như chính xác*" (tiếng anh là PAC – Probably Approximately Correct).

Giả sử $\mathbb{C}$ là tập các khái niệm định nghĩa trên không gian các đối tượng $\mathcal{X}$ và thuật toán $\mathfrak{L}$ dùng tập các giả thuyết $\mathbb{H}$.

Định nghĩa 4.1. ***$\mathfrak{L}$ học có lẽ gần như chính xác các khái niệm từ $\mathbb{C}$ dùng các giả thuyết từ $\mathbb{H}$:*** *nếu với mọi $0 < \varepsilon, \delta < 1$ tồn tại số $m_0 = m_0(\varepsilon, \delta)$ sao cho với mọi $c \in \mathbb{C}$, với mọi phân phối xác suất D trên $\mathcal{X}$, nếu $m > m_0$ thì*

$$P(\{S \in \mathcal{S}(m, c) : error_c(\mathfrak{L}(S)) < \varepsilon\}) > 1 - \delta$$

ở đây $m_0(\varepsilon, \delta)$ là đa thức theo $\frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{1}{\delta}$.

Ví dụ 4.1. Giả sử $\mathcal{X} = \{0, 1\}^3$ và $\mathbb{M}_3$ là tập các hàm đơn thức Bool (Boolean monomial). Giáo viên chọn ra một đơn thức nào đó, ví dụ $c = \overline{x}_2$. Học sinh nhận được một tập huấn luyện nào đó, ví dụ $S = \{(011, 0), (100, 1), (101, 1)\}$ và nhiệm vụ của học sinh là phải tìm một giả thuyết $h \in \mathbb{M}_3$ sao cho độ so lệch so với c là bé nhất.

Giả sử $\mathfrak{L}$ là thuật toán sau đây:

1. Initialize the hypothesis to the conjunction of all 2n literals.
$$h = x_1\overline{x_1}x_2\overline{x_2}\ldots x_n\overline{x_n}$$
2. For each training instance
   - if it is a positive example:
     remove x_i from h if $x_i = 0$ and remove $\overline{x_i}$ from h if $x_i = 1$;
   - if it is a negative example:
     do nothing;
3. Output the remaining hypothesis.

Áp dụng thuật toán trên cho tập huấn luyện S ta sẽ lần lượt được các giả thuyết sau:

- Lúc đầu ta có
$$h_0 = x_1 x_2 x_3 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3;$$
- đối tượng đầu tiên là phản ví dụ, vì vậy ta không đổi giả thuyết:
$$h_1 = x_1 x_2 x_3 \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3;$$
- đối tượng thứ hai là 100, vì vậy giả thuyết bị thay đổi như sau:
$$h_2 = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3;$$
- đối tượng thứ ba là 101, vì vậy giả thuyết bị thay đổi thành:
$$h_2 = x_1 \overline{x}_2;$$

Như vậy $\mathcal{L}(S) = x_1 \overline{x}_2$. Kiểm chứng với $c = \overline{x}_2$ ta thấy:

	$c = \overline{x}_2$	$h = x_1 \overline{x}_2$	$h = c$
000	1	0	$-$
001	1	0	$-$
010	0	0	$+$
011	0	0	$+$
100	1	1	$+$
101	1	1	$+$
110	0	0	$+$
111	0	0	$+$

Như vậy $error_c(\mathfrak{L}(S)) = 0.25$.

Ta cũng nhận thấy rằng với $S_1 = \{(010, 0), (011, 0), (110, 0)\}$ thì $error_c(\mathfrak{L}(S_1)) = 0.5$. Với $S_2 = \{(000, 1), (011, 0), (010, 0)\}$ thì $error_c(\mathfrak{L}(S_2)) = 0.375$. Còn với $S_3 = \{(001, 1), (111, 0), (101, 1)\}$ thì $error_c(\mathfrak{L}(S_3)) = 0$.

Đơn thức	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1	0	0	0	0	1	1	1	1
x2	0	0	1	1	0	0	1	1
x3	0	1	0	1	0	1	0	1
-x1	1	1	1	1	0	0	0	0
-x2	1	1	0	0	1	1	0	0
-x3	1	0	1	0	1	0	1	0
x1x2	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0
x1x3	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0
x2x3	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	1	0	0	0
x1x2x3	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

Tập các hàm đơn thức Bool (Boolean monomial) xác định trên tập $\mathcal{X} = \{0,1\}^3$.

Qua một số tính toán cụ thể, ta thấy rằng trong ví dụ này ta có 56 tập huấn luyện khác nhau và

$$P(\{S \in \mathcal{S}(3,c) : error_c(\mathfrak{L}(S)) < 0.4\}) = \frac{52}{56} = 0.929$$
$$P(\{S \in \mathcal{S}(3,c) : error_c(\mathfrak{L}(S)) < 0.3\}) = \frac{28}{56} = 0.5$$
$$P(\{S \in \mathcal{S}(3,c) : error_c(\mathfrak{L}(S)) = 0\}) = 0.214$$

Nếu ta dùng 4 đối tượng trong tập huấn luyện thì kết quả sẽ như sau:

$$P(\{S \in \mathcal{S}(4,c) : error_c(\mathfrak{L}(S)) < 0.4\}) = \frac{69}{70} = 0.986$$
$$P(\{S \in \mathcal{S}(4,c) : error_c(\mathfrak{L}(S)) < 0.3\}) = \frac{53}{70} = 0.757$$
$$P(\{S \in \mathcal{S}(4,c) : error_c(\mathfrak{L}(S)) = 0\}) = \frac{29}{70} = 0.414$$

4.4 Có khả năng học được

Định nghĩa "có lẽ gần như chính xác" ở trên là thuộc tính tích cực, thể hiện tính hiệu quả của các thuật toán. Trong phần này chúng ta sẽ định nghĩa một tính chất tốt của vấn đề học máy, đó là khả năng có thể học nhận biết khái niệm bằng phương pháp quy nạp (learnability).

Giả sử $\mathbb{C}$ là tập các khái niệm định nghĩa trên không gian các đối tượng $\mathcal{X}$ và $\mathbb{H}$ tập các giả thuyết. Với $c \in \mathbb{C}$ và với mỗi tập huấn luyện $S = \{(x_1, c(x_1)), \ldots, (x_m, c(x_m))\} \in \mathcal{S}(m, c)$ ta gọi

$$\mathcal{H}^c(S) = \{h \in \mathcal{H} : h(x_i) = c(x_i) \text{ với mọi } x_i \in S\}$$

là tập các giả thuyết $h \in \mathcal{H}$ giống hệt c trên tập huấn luyện S. Ngoài ra ta cũng gọi

$$\mathcal{B}_\varepsilon^c = \{h \in \mathcal{H} | error_c(h) \geqslant \varepsilon\}$$

là tập các giả thuyết "yếu kém", tức là các giả thuyết có độ sai lệch lớn hơn ε.

Định nghĩa 4.2. ***Tập*** $\mathbb{C}$ ***có khả năng học được nhờ các giả thuyết từ tập*** $\mathbb{H}$***:*** *nếu với mọi phân phối xác suất D trên $\mathcal{X}$, với mọi $c \in \mathbb{C}$ và với mọi $0 < \varepsilon, \delta < 1$, tồn tại số $m_0 = m_0(\varepsilon, \delta)$ sao cho nếu $m > m_0$ thì*

$$P(\{S \in \mathcal{S}(m, c) : \mathcal{H}^c(S) \cap \mathcal{B}_\varepsilon^c = \emptyset\}) > 1 - \delta.$$

Trực quan ta thấy định nghĩa 4.2 liên quan mật thiết đến định nghĩa 4.1. Thực vậy, giả sử thuật toán $\mathfrak{L}$ học các khái niệm của $\mathbb{C}$ dùng các giả thuyết từ $\mathbb{H}$. Lúc đó thuật toán $\mathfrak{L}$ được gọi là ***học sinh gương mẫu*** nếu với mỗi tập huấn luyện $S \in \mathcal{S}(m, c)$, $\mathfrak{L}$ luôn tìm được giả thuyết $h = \mathfrak{L}(S)$ với độ sai lệch bằng $error_S(h) = 0$ trên tập S. Nói cách khác $\mathfrak{L}(S) \in \mathcal{H}^c(S)$.

Định lý 4.1. *Nếu tập $\mathbb{C}$ có khả năng học được nhờ các giả thuyết từ tập $\mathbb{H}$ và $\mathfrak{L}$ là học sinh gương mẫu thì $\mathfrak{L}$ học có lẽ gần như chính xác các khái niệm từ $\mathbb{C}$ dùng các giả thuyết từ $\mathbb{H}$.*

Trong một số trường hợp ta cũng có thể giả sử rằng học sinh và thầy giáo cùng dùng chung một tập các khái niệm, có nghĩa là $\mathbb{H} = \mathbb{C}$. Lúc đó thay vì nói rằng "tập $\mathbb{H}$ có khả năng học được nhờ các giả thuyết từ tập $\mathbb{H}$" ta sẽ nói "$\mathbb{H}$ là tập có thể học được". Ta cũng có định lý sau đây:

Định lý 4.2 (Haussler, 1988)**.** *Nếu $\mathbb{H} = \mathbb{C}$ là tập hữu hạn thì $\mathbb{H}$ là tập có thể học được.*

Ở chương sau chúng ta sẽ xem xét các tập có vô hạn phần tử nhưng vẫn có khả năng học được.

4.5 VC dimension

Xét tập các giả thuyết $\mathbb{H}$ gồm các khái niệm được xác định trên không gian các đối tượng $\mathcal{X}$.

Với mỗi số tự nhiên $m \in \mathbb{N}$ ta xét tập $S = \{x_1, x_2, ...x_m\}$ gồm m đối tượng thuộc $\mathcal{X}$. Mỗi giả thuyết $h \in \mathbb{H}$ định nghĩa một tập con của $h(S) \subset S$ như sau:

$$h(S) = \{x \in S : h(x) = 1\}$$

Mỗi tập con dạng $h(S)$ đều có thể biểu diễn dạng vectơ như sau:

$$h(S) = \langle h(x_1), h(x_2), ..., h(x_m)\rangle \in \{0, 1\}^m$$

Ta quan tâm đến số tập con của S có thể định nghĩa được dùng các khái niệm của tập $\mathbb{H}$. Số lượng này được ký hiệu bởi $\Pi_{\mathbb{H}}(S)$ và được định nghĩa như sau:

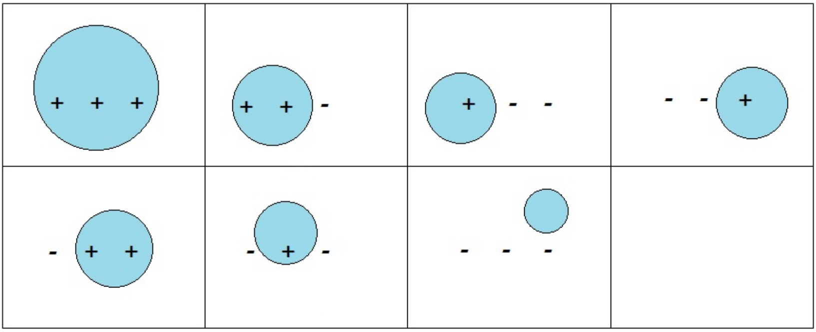
$$\Pi_{\mathbb{H}}(S) = |\{\langle h(x_1), h(x_2), ..., h(x_m)\rangle \in \{0, 1\}^m : h \in \mathbb{H}\}|$$

Ta cũng sẽ gọi

$$\Pi_{\mathbb{H}}(m) = \max_{|S|=m} \{\Pi_{\mathbb{H}}(S)\}$$

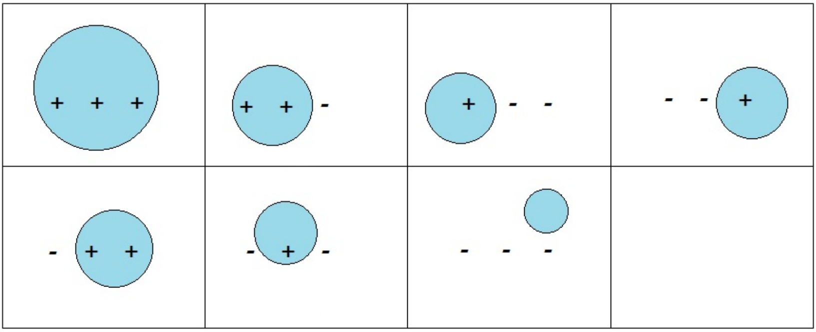
Tất nhiên ta có $\Pi_{\mathbb{H}}(S) \leq \Pi_{\mathbb{H}}(m) \leq 2^m$.

Nếu $\Pi_{\mathbb{H}}(S) = 2^m$ thì mọi tập con của S đều định nghĩa được bằng các giả thuyết của tập $\mathbb{H}$. Lúc đó ta sẽ nói rằng tập S bị *băm bởi tập* $\mathbb{H}$.



Hình 2: Với tập S_1 gồm 3 điểm thẳng hàng thì $\Pi_{\mathbb{H}}(S_1) = 7$

Ví dụ 4.2. Ta hãy xét $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ và $\mathbb{H}$ là tập các khái niệm "hình tròn". Hình 2 cho thấy nếu S_1 là tập gồm 3 điểm thẳng hàng trên mặt phẳng thì $\Pi_{\mathbb{H}}(S_1) = 7$. Ở Hình 3 ta lại thấy nếu S_2 là tập gồm 3 điểm không thẳng hàng thì $\Pi_{\mathbb{H}}(S_2) = 8$. Như vậy $\Pi_{\mathbb{H}}(3) = 8 = 2^3$.



Hình 3: Với tập S_2 gồm 3 điểm không thẳng hàng thì $\Pi_{\mathbb{H}}(S_2) = 8 = 2^3$

Qua ví dụ trên ta thấy nếu $\Pi_{\mathbb{H}}(m) = 2^m$ với một số tự nhiên $m \in \mathbb{N}$ nào đó thì điều đó có nghĩa rằng tồn tại tập $S \subset \mathcal{X}$ gồm m phần tử và bị băm bởi tập $\mathbb{H}$. Giá trị m lớn nhất thỏa mãn tính chất

$\Pi_{\mathbb{H}}(m) = 2^m$ có thể coi như độ đo sự phức tạp của tập $\mathbb{H}$.

Định nghĩa 4.3. ***Độ đo Vapnik-Chervonenkis (VCdim)*** *của không gian các giả thuyết $\mathbb{H}$ được định nghĩa như sau:*

$$VCdim(\mathbb{H}) = \max\{m : \Pi_{\mathbb{H}}(m) = 2^m\}$$

Chú ý: *nếu tập $\{m : \Pi_{\mathbb{H}}(m) = 2^m\}$ là vô hạn thì $VCdim(\mathbb{H}) = \infty$.*

Ví dụ 4.3. Từ Ví dụ 4.2 ta thấy nếu $\mathbb{H}$ là tập các hình tròn trên mặt phẳng $VCdim(\mathbb{H}) \geq 3$.

Trong trường hợp 4 điểm trên mặt phẳng ta có thể chứng minh khẳng định sau đây: Với mọi bộ 4 điểm $S = \{A, B, C, D\}$ trên mặt phẳng, tồn tại một tập con của S không thể xác định được bằng 1 đường tròn. Từ đó suy ra $\Pi_{\mathbb{H}}(4) < 2^4$. Vì vậy $VCdim(\mathbb{H}) = 3$.

Bạn đọc có thể coi đây là một bài tập hình học thú vị và có thể tự chứng minh.

Ví dụ 4.4. Ta lại xét $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ và $\mathbb{P}$ là tập các khái niệm "phân loại tuyến tính", tức là tập các hàm dạng

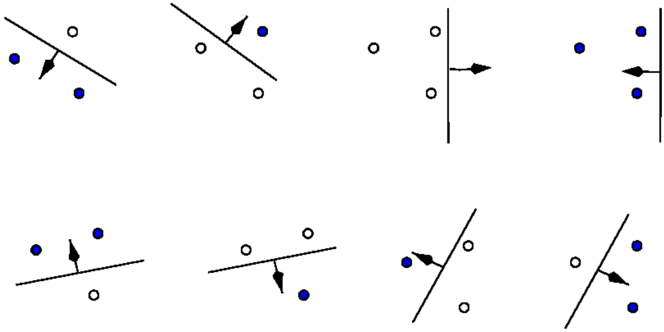
$$L : \mathbb{R}^2 \to \{0, 1\} \text{ sao cho } L(x, y) = sign(ax + by + c)$$

Ta cũng có thể chứng minh rằng $VCdim(\mathbb{P} = 3$. Để chứng minh rằng $VCdim(\mathbb{P}) \geq 3$ ta có thể xem Hình 4.

Để chứng minh rằng $VCdim(\mathbb{P}) \leq 3$ ta có thể sử dụng một định lý nổi tiếng sau đây:

Định lý Radon: Với mọi tập S gồm $(n+2)$ điểm trong không gian $\mathbb{R}^n$ tồn tại một tập con $E \subset S$ sao cho

$$convex(E) \cup convex(S - E) \neq \emptyset$$



Hình 4: Ví dụ 3 điểm trên mặt phẳng bị băm bởi các hàm phân loại tuyến tính.

ở đây $convex(E)$ là ký hiệu bao lồi của tập E.

Sử dụng định lý Radon ta có thể chứng minh rằng tập các hàm phân loại tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^n$ có độ đo $VCdim$ bằng $(n+1)$.

4.6 Các định lý cơ bản của lý thuyết học máy

Tới thời điểm này chúng ta đã có thể quay lại những câu hỏi chính trong phần mở đầu của bài báo.

Để giải thích khả năng thành công hoặc thất bại của bài toán nhận biết khái niệm, chúng ta đã định nghĩa độ đo $VCdim(\mathbb{H})$ cho tập các giả thuyết $\mathbb{H}$. Tương tự như quan sát ban đầu, chứng minh kiểu quy nạp không hoàn toàn chỉ có thể áp dụng cho các đẳng thức có dạng đa thức. Hai định lý sau đây chỉ ra rằng các thuật toán học máy (sử dụng tiếp cận quy nạp không hoàn toàn) chỉ có thể áp dụng cho các tập khái niệm với độ đo $VCdim$ hữu hạn.

Định lý 4.3 (Điều kiện cần). *Nếu* $VCdim(\mathbb{H}) = \infty$ *thì* $\mathbb{H}$ *không phải là tập có thể học được.*

Định lý 4.4 (Định lý cơ bản của lý thuyết học máy). *Nếu* $VCdim(\mathbb{H})$ *là số hữu hạn thì tập* $\mathbb{H}$ *có thể học được.*

Ví dụ: xét $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ còn $\mathbb{H} = \{f : x \mapsto sign(\sin(ax)) : a \in \mathbb{R}^+\}$. Bạn đọc có thể coi việc chứng minh rằng $VCdim(\mathbb{H}) = \infty$ như một bài tập nhỏ. Điều này có nghĩa rằng tồn tại tập hữu hạn các số thực S sao cho với mọi giả thuyết h mà học sinh đưa ra tồn tại (vô số) các hàm dạng $f : x \mapsto sign(sin(ax))$ sao cho f và h ngược nhau hoàn toàn trên S. Đây là một cách lý giải trực quan rằng không thể học được trong không gian các giả thuyết dạng này.

Không những thế, độ đo $VCdim$ còn có thể dùng để đánh giá độ phức tạp của không gian các khái niệm. Nó có ý nghĩa tương tự như bậc của đa thức đối với độ phức tạp của phương pháp chứng minh quy nạp không hoàn toàn mà ta đã xét ở phần mở đầu. Ta cũng có các kết quả sau đây:

Định lý 4.5. *Giả sử* $VCdim(\mathbb{H}) = d$*, với* $1 \le d < \infty$*. Lúc đó nếu* $\mathfrak{L}$ *là học sinh gương mẫu thì* $\mathfrak{L}$ *học có lẽ gần như chính xác các khái niệm từ* $\mathbb{H}$ *và hơn thế nữa, nếu gọi* $m_L(\mathbb{H}, \delta, \varepsilon)$ *là số đối tượng huấn luyện cần thiết để đạt kết quả như trong định nghĩa 4.1 thì*

$$m_L(\mathbb{H}, \delta, \varepsilon) \le \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \left(d \log \frac{12}{\varepsilon} + \log \frac{2}{\delta} \right) \right\rceil$$

4.7 Các mốc quan trọng của Machine Learning

- Học máy (Machine Learning) là một nhánh của trí tuệ nhân tạo (AI) chuyên nghiên cứu "các thuật toán" để tạo ra các chương trình "học tự động" từ những thông tin sẵn có.

- Các thuật toán "học máy" không được lập trình một cách chính xác từ trước mà phải có khả năng thay đổi cách hoạt động của mình tùy theo tình huống.

- Hiện nay các chương trình học máy có khả năng nói chuyện với người sử dụng, tự động lái xe, viết bài tường thuật các trận đấu thể thao hoặc tìm các đối tượng nghi vấn khủng bố.

- Học máy đang ảnh hưởng đến phần lớn các ngành công nghiệp. Tất cả mọi người trong xã hội hiện đại cần phải có khái niệm cơ bản về học máy.

1950 Trắc ngiệm Turing.

1952 Arthur Samuel: chương trình chơi cờ carô đầu tiên

1957 Frank Rosenblatt: mạng nơ-rôn đầu tiên mô phỏng quá trình suy nghĩ của não người.

1967 Thuật toán $k - NN$.

1979 Chiếc xe không người lái Stanford Cart (Moravec) đã đi qua phòng có nhiều chướng ngại vật (thời gian 5 tiếng).

1981 Gerald Dejong: phương pháp Explanation Based Learning (EBL).

1985 Terry Sejnowski: chương trình NetTalk học cách phát âm như trẻ em.

1990- Học máy chuyển từ knowledge-driven approach sang data-driven approach.

1997 Deep Blue (IBM) thắng kiện tướng thế giới cờ vua.

2006 "Deep learning" (Geoffrey Hinton).

2010 Hệ thống Kinect (Microsoft) có khả năng nhận biết 30 cử chỉ của người sử dụng (20 thể loại).

2011 Hệ thống Watson (IBM) đã thắng 2 nhà vô địch trong trò chơi truyền hình Jeopardy.

2011 Google xây dựng hệ thống Brain để bắt chước cách các chú mèo phân loại các vật thể.

2012 Google X Lab viết chương trình tự động tìm kiếm các chú mèo trong các phim của Youtube.

2014 DeepFace (Facebook) phát hiện và nhận dạng người trong ảnh.

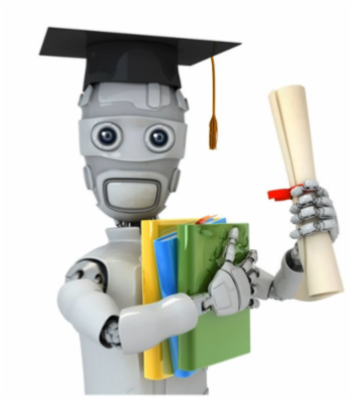
2015 Amazon khai trương nền tảng cho hệ thống học máy.

2015 Distributed Machine Learning Toolkit (Microsoft).

2015 Ứng dụng học máy để thu thập sự ủng hộ lời kêu gọi chống vũ khí tự điều khiển.

2016 AlphaGo (Google) thắng kiện tướng cờ vây (cờ Go).

2016 Bầu cử Mỹ?



Thông báo gỡ bài về HOMC 2017

BBT Sputnik Newsletter

Trong phiên bản đầu tiên của số báo này có đăng một bài bình luận, với tên tác giả là TS. Nguyễn Văn Lợi, về cuộc thi Hanoi Open Mathematical Competition 2017 (một cuộc thi toán bằng tiếng Anh dành cho các học sinh lớp 8 và lớp 10 do GS Nguyễn Văn Mậu và Hội Toán học Hà Nội sáng lập, kết hợp tổ chức cùng Sở GD Hà Nội).

Sau khi bài đăng lên, Ban Biên Tập Sputnik Newsletter được biết là nó đã bị sửa đổi không còn thể hiện đúng ý của tác giả.

Ban Biên Tập luôn tôn trọng các tác giả và tuân thủ nguyên tắc không sửa bài của ai nếu không có sự đồng ý của người đó. Sự cố đáng tiếc này xảy ra là do Ban Biên Tập chủ quan tin rằng bài nhận được là đúng ý của tác giả, không kiểm tra lại.

Ban Biên Tập Sputnik Newsletter thành thật xin lỗi TS. Nguyễn Văn Lợi cùng các bạn đọc và những người liên quan về sự cố rất đáng tiếc này, và xin gỡ bài báo khỏi số báo này theo yêu cầu của TS. Nguyễn Văn Lợi.

Bạn đọc quan tâm đến kỳ thi này có thể xem đề thi và đáp án tại các địa chỉ sau:

Đề thi: https://goo.gl/aT9G1x

Đáp án: https://goo.gl/my8Qay

Cuộc thi chọn đội tuyển IMO 2017: Đề bài và bình luận

Trần Nam Dũng
(Sputnik Education)

Trong hai ngày 25, 26/3/2017 đã diễn ra kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi toán quốc tế năm 2017 với sự tham dự của 49 học sinh xuất sắc nhất đến từ các tỉnh thành và các trường chuyên thuộc các trường đại học lớn trong cả nước. Mỗi ngày thi, các thí sinh phải giải quyết 3 bài toán trong thời gian 240 phút.

Đề thi năm nay (xem hai trang sau) được đánh giá là khá khó và có phong cách gần với đề thi IMO hơn các năm trước. Cấu trúc đề thi bao gồm 2 bài hình học, 1 bài đại số, 1 bài tổ hợp, 1 bài số học và 1 bài tổ hợp số học. Như vậy đề chọn đội tuyển năm nay cũng theo xu hướng của IMO là thiên về tổ hợp nhiều. Ngay cả bài 5 (bài đại số) cũng có cách phát biểu (và cả cách giải) có nhiều nét tổ hợp.

Các bài toán 2 và 4 theo đánh giá chung được coi là bài dễ nhất của mỗi ngày. Bài 4 cấu hình cũng gọn gàng và kiến thức sử dụng cũng chỉ xoay quanh tam giác đồng dạng, tứ giác nội tiếp, trục đẳng phương (xem bình luận chi tiết hơn ở phần sau). Bài số 2 là một bài toán số học thuần tuý, khai thác một chủ đề khá quen thuộc đối với học sinh Việt Nam là số dư trong phép chia hệ số cho số nguyên tố p với các định lý Lucas, Wolstenhome, Babbage hay công thức Legendre, vì vậy, dù ở các mức độ khác nhau, các thí sinh đều có thể tiếp cận được bài này.

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN IMO 2017

Đề thi ngày 1 (25/03/2017)

Bài 1. Cho 44 cái lỗ phân biệt trên một cái rãnh là đường thẳng và 2017 con kiến. Mỗi con kiến sẽ chui lên từ một cái lỗ và bò đến một cái lỗ khác với vận tốc không đổi rồi chui xuống đó. Gọi T là tập các thời điểm mà con kiến chui lên hoặc chui xuống các cái lỗ. Biết rằng vận tốc của các con kiến đôi một khác nhau và $|T| \leq 45$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai con kiến nào đó không gặp nhau.

Quy ước rằng hai con kiến gặp nhau khi và chỉ khi tồn tại một thời điểm mà cả hai ở cùng một vị trí trên rãnh (kể cả lúc chui lên và xuống).

Bài 2. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $x_n = C_{2n}^n$.

1. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{2017^k}{2} < n < 2017^k$ với k là số nguyên dương nào đó thì x_n là bội của 2017.

2. Tìm tất cả số nguyên dương $h > 1$ để tồn tại các số nguyên dương N, T sao cho với mọi $n > N$ thì x_n là dãy số tuần hoàn theo modulo h với chu kỳ T.

Bài 3. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi I_b, I_c lần lượt là các tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm I_bE, I_cF. Giả sử (PAC) cắt AB tại R và (QAB) cắt AC tại S.

1. Chứng minh rằng PR, QS, AI đồng quy.

2. Giả sử DE, DF lần lượt cắt I_bI_c tại K, J. EJ cắt FK tại M và PE, QF cắt $(PAC), (QAB)$ lần lượt tại X, Y. Chứng minh rằng BY, CX, AM đồng quy.

Đề thi ngày 2 (26/03/2017)

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm A di động trên (O) sao cho $AB > BC$ và M là trung điểm AC. Đường tròn đường kính BM cắt (O) tại R. Giả sử RM cắt (O) tại Q, cắt BC tại P. Đường tròn đường kính BP cắt AB, BO lần lượt tại K, S.

1. Chứng minh rằng SR đi qua trung điểm KP.

2. Gọi N là trung điểm BC. Trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính AN, BM cắt SR tại E. Chứng minh rằng ME đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho 2017 số thực dương $a_1, a_1, \ldots, a_{2017}$. Với mỗi $n > 2017$, ta đặt $a_n = \max\{a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3} | i_1 + i_2 + i_3 = n, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n-1\}$.

Chứng minh rằng tồn tại m nguyên dương không vượt quá 2017 và $N > 4m$ sao cho $a_n a_{n-4m} = a_{n-2m}^2$ với mọi $n > N$.

Bài 6. Với mỗi số nguyên dương n, xét $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ là hoán vị của $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Một hoán vị như thế được gọi là "đẹp" nếu với mọi $1 \leq i < j \leq 2n$ thì $a_i + a_{n+i} = 2n+1$ và $a_i - a_{i+1}$ không đồng dư với $a_j - a_{j+1}$ theo modulo $2n+1$. Quy ước $a_{2n+1} = a_1$.

1. Với $n = 6$, hãy chỉ ra một hoán vị đẹp.

2. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương thì luôn tồn tại một hoán vị đẹp.

Đáng chú ý là bài số 1, bài được ban đề thi đánh giá là dễ nhất của ngày thứ nhất lại gây nhiều khó khăn cho các thí sinh. Các em đã không thể phát biểu lại bài toán một cách rành mạch bằng ngôn ngữ toán học nên đã không thể xử lý được, không những thế còn để tốn nhiều thời gian vào bài toán này. Nếu biết cách chuyển đổi bài toán (mô hình hoá) thành đồ thị (theo nghĩa đồ thị) hoặc đồ thị (theo nghĩa các đường biểu diễn đường đi con kiến) thì bài toán có thể giải quyết một cách khá đơn giản, chẳng hạn bằng quy nạp (xem lời giải và bình luận của GS Nguyễn Tiến Dũng dưới đây).

Các bài toán còn lại gồm bài số 3, 5 và 6 được đánh giá là khó. Phân tích chi tiết về bài số 3 tham khảo bình luận của thầy Trần Quang Hùng dưới đây, nhưng cảm nhận đầu tiên thì chỉ vẽ hình thôi đã thấy thật rối rắm và phức tạp. Bài số 5 là một bài toán có cách phát biểu rất tổ hợp, dạng dãy số truy hồi với các số hạng đầu tiên bất kỳ. Để tiếp cận được bài này, học sinh phải tỉnh táo nhận ra rằng hằng số 2017 trong đề bài có thể thay bằng một số nguyên dương bất kỳ và bắt đầu làm thử với các trường hợp tham số nhỏ để dự đoán quy luật của dãy số. Cũng có thể thấy rằng bằng cách logarit hoá, các phép nhân trong bài toán này sẽ biến thành phép cộng và bài toán có thể đưa về một biến thể của bài toán số 6 trong đề thi IMO 2010. Điều này một lần nữa nhấn mạnh độ khó của bài số 5, đồng thời cũng là một điểm chưa hay của đề thi lần này.

Bài toán số 6 là một bài toán số học-tổ hợp với yêu cầu xây dựng một hoán vị của $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ thoả mãn một điều kiện số học. Với bài toán này, ngoài trường hợp $n = 6$ có thể xây dựng ví dụ bằng phép thử sai, có thể xây dựng ví dụ tổng quát cho một số trường hợp. Chẳng hạn nếu $2n + 1$ có căn nguyên thuỷ α thì đặt $a_k = \alpha^k \pmod{2n+1}$ thì rõ ràng các hiệu $a_{i+1} - a_i \equiv \alpha^i(\alpha - 1)$ phân biệt môđulo $2n+1$ và $a_i + a_{n+i} \equiv 0 \pmod{2n+1}$. Trong trường hợp tổng quát, ý tưởng chính là xây dựng n số hạng đầu tiên của dãy số, còn đoạn sau lấy phần bù. Tuy nhiên, cần có điều kiện bổ sung đối với a_n và a_1, vì $a_{n+1} = 2n + 1 - a_1$. Và đây cũng chính là điểm mà các thí sinh có thể phạm sai lầm do ngộ nhận.

Với những nhận định trên đây cũng như tham khảo một số thông tin về bài làm của các thí sinh, chúng tôi cho rằng bên cạnh 2 bài toán 2 và 4 thuộc dạng bài "cần phải làm được nếu muốn đậu đội tuyển" thì chiếc vé dự IMO sẽ được quyết định ở 4 bài còn lại ở các bài 1, 3, 5, 6 với tình trạng rất khó đoán. Khác với một số năm trước khi có những bài toán quá khó không ai làm được, đề thi năm nay độ khó được chia đều, khó dễ thuỳ theo sở trường của từng em.

Thực tế là hầu như bài nào cũng có học sinh giải được tạo thành các thế "cài răng lược", ví dụ có học sinh làm được bài 1, 6 lại không làm được 3, 5, có học sinh làm được bài 5 lại không làm được bài 1. Ngoài ra các bài 1, 5, 6 đều là các bài có thể có lỗi trong trình bày, thậm chí có những sai sót lớn do ngộ nhận. Với đề thi như thế này, nếu làm chắc chắn 4 bài thì gần như sẽ có vé, còn điểm chuẩn vùng tranh chấp sẽ là 3.5++.

Cuối cùng, chúng tôi giới thiệu phần bình luận về 2 bài hình của thầy Trần Quang Hùng và phần phân tích bài 1 của GS Nguyễn Tiến Dũng.

Bình luận của thầy Trần Quang Hùng, GV trường THPT chuyên, ĐHKHTN Hà Nội về hai bài hình.

Năm nay TST có 2 bài hình một bài ở vị trí số 3 được coi là khó nhất ngày 1 và một bài ở vị trí số 4 được coi là dễ nhất ngày 2. Mỗi bài đều có 2 ý.

Bài hình số 3 phần a) sử dụng kiến thức tam giác đồng dạng và tứ giác nội tiếp của chương trình cấp 2, ý khó tập trung ở câu b) đòi hỏi vận dụng nhiều kiến thức tổng hợp có liên quan nhiều đến bài hình G7 trong IMO shortlist 2002, trong đó có sử dụng cả kiến thức về hàng điều hòa. Cấu trúc là ghép nối các bài toán riêng lẻ thành một bài tổng hợp.

Bài hình câu 4 phần a) cũng chỉ cần các kiến thức chương trình cấp 2, phần b) vận dụng các kiến thức trục đẳng phương, ở ý này điểm cố định có đặc biệt hơn so với các bài thông thường trước đây.

Lời giải và bình luận bài số 1 của GS Nguyễn Tiến Dũng

Gợi ý lời giải: Có gì liên quan giữa các số 44, 45 và 2017? Dễ thấy $44 \times 45 = 1980 < 2017$, nên có thể đoán đây là mấu chốt bài toán?

Vậy tai sao lại dùng tích? Bởi vì có nhiều nhất là từng đó điểm (vị trí, thời gian chạm lỗ khi lên hoặc xuống lỗ) trên mặt phẳng toạ độ. Ta vẽ trên mặt phẳng toạ độ các đồ thị đường đi của các con kiến, mỗi đồ thị là 1 đoạn thẳng nối 2 trong số các điểm trên. Tất cả các đoạn thẳng đó đều có hướng khác nhau (vì vận tốc các con kiến khác nhau). Hướng ở đây hiểu là góc so với đường nằm ngang modulo pi.

Câu hỏi đặt ra bây giờ là nếu hai đoạn một đều có điểm chung (hai con kiến nào cũng có gặp nhau) thì có nhiều nhất là bao nhiêu đoạn thẳng? Ta có thể sắp xếp thứ tự các đoạn thẳng theo thứ tự vòng tròn theo góc của chúng.

Cố định 1 đoạn đầu tiên, từ điểm A1 đến điểm A2. Đoạn thứ hai có hướng quay về “bên phải” so với đoạn thứ nhất, nên phải có thêm ít nhất 1 điểm mới A3 (tức là hoặc là A1A3 với A3 nằm bên phải A1A2, hoặc A3A2 với A3 nằm bên trái A1A2, hoặc A3A4 (hai điểm mới) nằm ở hai bên của A1A2). Thêm đoạn thứ 3 phải thêm ít nhất 1 điểm mới, trừ trường hợp tạo thành 3 đoạn A1A2, A1A3, A2A3. Cứ như thế: thêm 1 đoạn thì cần thêm ít nhất 1 điểm mới, trừ khi thêm đoạn cuối cùng thì dùng được 2 điểm cũ. Như vậy để có n đoạn đôi một có điểm chung thì cần ít nhất n điểm. Với n = 44 lần 45 thì có nhiều nhất là từng đó con kiến đôi một có gặp nhau. Vì 2017 lớn hơn 44 lần 45 nên có hai con kiến không gặp nhau.

Thay vì nói đến hướng modulo pi, có thể chứng minh bằng quy nạp kiểu khác cho dễ hình dung hơn: Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng nếu có n điểm trên mặt phẳng thì không tạo được quá n đoạn thẳng với các đỉnh là các điểm đó sao cho đôi một có điểm chung và không có hai đoạn nào song song hay đè lên nhau.

Với n = 2, 3: hiển nhiên

Từ n-1 đến n:

Nếu có 1 điểm với không quá 1 đoạn xuất phát từ điểm đó, thì xoá điểm đó (và đoạn đó) đi, đưa về trường hợp n-1 điểm.

Giả sử bây giờ đỉnh nào cũng có ít nhất 2 đoạn xuất phát. Nếu có đỉnh A có 3 đoạn xuất phát thì sẽ “có vấn đề”: chẳng hạn là AB, AC, AD. Nếu BCD chứa A bên trong thì đoạn thứ hai từ B không thể cùng cắt AC và AD. Nếu BCD không chứa A bên trong thì ta có chẳng hạn tia AC nằm giữa hai tia AB và AD. Khi đó đoạn thứ hai từ đỉnh C không thể cùng cắt AB và AD. Như vậy từ mỗi đỉnh chỉ có đúng 2 đoạn, suy ra số đoạn bằng đúng số đỉnh trong trường hợp này.

Số phức ứng dụng vào đâu?

Nguyễn Tiến Dũng
(Sputnik Education)

Có giáo viên THPT hỏi tôi về chuyện làm sao giới thiệu cho các học sinh về ứng dụng của số phức? Số phức thì có ứng dụng gì?

Đây là một câu hỏi rất chính đáng. Bởi kho thời gian của chúng ta có hạn, chúng ta phải ưu tiên học những thứ cần thiết, có nhiều lợi ích. Nhưng trong sách giáo khoa hiện tại không nói đến lợi ích của số phức. Bản thân giáo viên cũng không biết số phức dùng làm gì, thì làm sao học sinh thấy nó có ý nghĩa được. Hệ quả tất yếu là nhiều người lên tiếng đòi bỏ số phức ra khỏi chương trình học phổ thông.

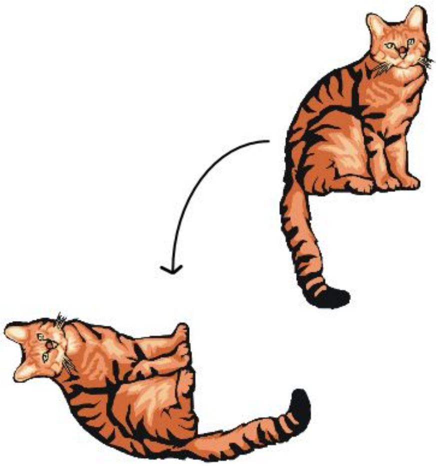
Vậy số phức dùng để làm gì? Nó liên quan gì đến thế giới tự nhiên và cuộc sống của ta?

Nếu như nói "âm ba con gà" hay "hai phần năm con gà" còn có nghĩa (tuy rằng hình dung "con gà âm" thật khó, nhưng có thể coi "gà âm" là "gà vay nợ" hay "gà hao hụt"), thì nói "3i con gà" hẳn là vô nghĩa. Số ảo i không dùng để đo độ lớn của các đại lượng được. Thế thì nó đo cái gì, nó xuất hiện ở đâu? Trong tự nhiên có cái gì mà bình phương lên lại bằng -1 không?

Câu trả lời là có: phép quay 90 độ có bình phương bằng -1!

Quay hai lần 90 độ thì bằng quay 180 độ, mà quay 180 độ có nghĩa là lấy điểm ngược lại, cũng có nghĩa là nhân với -1. Vậy ta có thể nói rằng số ảo i đại diện cho sự quay, sự chuyển hướng 90 độ (quang điểm hay trục nào đó) trong tự nhiên! Còn số phức nói chung thì là một phép tổng hợp vừa quay vừa co giãn (phép biến đổi bảo toàn góc).

Chính vì "i chẳng qua là quay 90 độ" nên số phức rất hiệu nghiệm trong hình học phẳng và trong lượng giác. Nhiều vấn đề của hình học phẳng rất phức tạp, hay nhiều công thức lượng giác phức tạp, trở nên "ngon ăn" hơn hẳn khi sử dụng số phức để giải quyết. Sách dạy về số phức nên đưa các ứng dụng hình học và lượng giác này làm ví dụ minh hoạ.



Phép quay 90 độ có thể viết như là phép nhân với số ảo i.

Ngoài hình học phẳng, có thể kể ra vô số các vấn đề khác trong toán (ở mức độ cao hơn), mà nếu không có số phức thì cũng "chưa chết hẳn", nhưng có số phức thì trở nên đẹp đẽ dễ dàng hơn nhiều, ví dụ như:

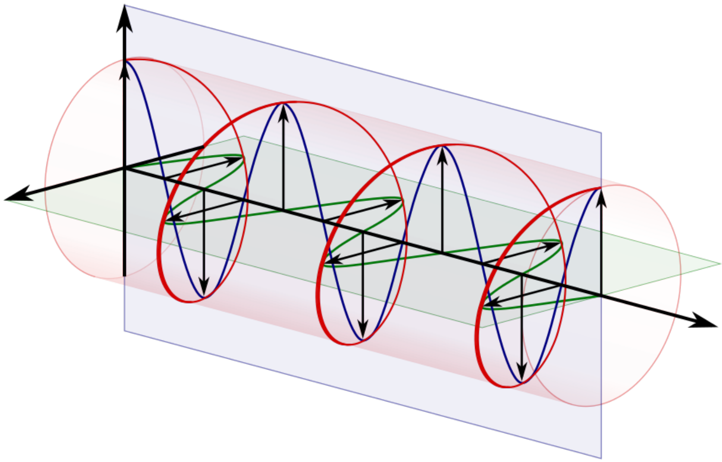
- Phân tích đa thức ra thừa số (nhơ có tính chất đóng của trường số phức nên phân tích được dễ dàng)

- Tính toán các tích phân

- Tìm dạng chuẩn và phân loại các cấu trúc toán học, v.v.

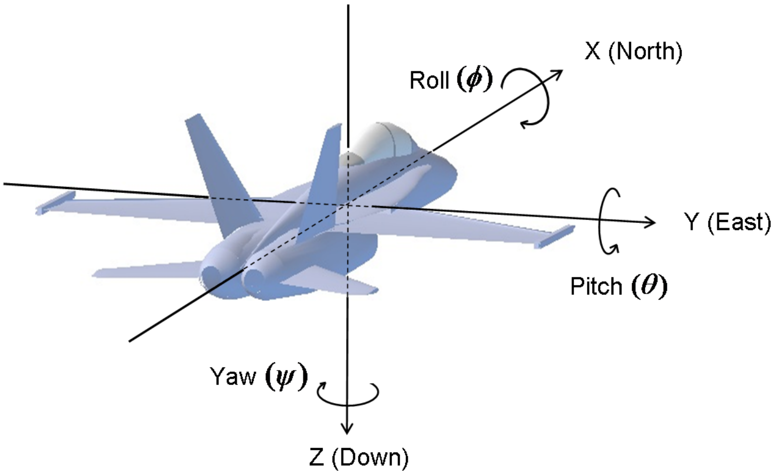
Nói theo nhà toán học Jacques Hadamard thì “đường đi ngắn nhất từ thực đến thực là qua phức”. (Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe). Trong toán học, hiện tượng rất hay gặp là để phân loại những cái gì đó trên trường số thực, người ta phức hoá nó, phân loại trên trường số phức trước cho đơn giản, rồi sau đó mới quay lại trường số thực.

Trong vật lý ngày nay, số phức xuất hiện rất nhiều. Bởi vì vật lý liên quan đến hình học, có nhiều đại lượng không chỉ có độ lớn mà còn có hướng. Mà đã nói đến hướng là dễ đụng đến số phức, vì số ảo thể hiện sự quay 90 độ. Ví dụ như để mô tả điện xoay chiều (là thứ điện ta dùng chủ yếu ngày nay) hay một số thứ trong mạng điện nói chung, người ta có thể dùng số phức.



Nhiều sóng vật lý có tính chất quay, mô tả bằng số phức.

Đặc biệt là trong vật lý lượng tử, ngay khái niệm “sóng” để mô tả vật chất và phương trình Shroedinger mô tả biến đổi của sóng đó theo thời gian đã viết bằng số phức. Không ai có thể hình dung nổi vật lý hiện đại mà thiếu số phức. Điều đó không có nghĩa là thế giới của chúng ta là thế giới phức, mà chẳng qua là trong đó có nhiều cái nó quay, mà đã quay thì biểu diễn bằng số phức nhiều khi tiện hơn hẳn là bằng số thực!



Mở rộng tiếp theo của số phức là số quaternion có ứng dụng quan trọng trong hình hoạ máy tính vì nó cho phép mô tả phép quay trong 3 chiều (quay theo 3 trục cùng một lúc).

Xin mời bạn đọc xem bài nối tiếp theo, của tác giả Nguyễn Thành Khang, về một số ứng dụng của số phức trong toán tổ hợp!

Ứng dụng số phức trong các bài toán Tổ hợp

Nguyễn Thành Khang

Mục **Bạn đọc viết** do TS. toán học Nguyễn Văn Minh, Đại học Ngoại thương, phụ trách. Bạn đọc có bài viết hay muốn chia sẻ với Sputnik Newsletter có thể gửi đến nguyenvanminh_math@ftu.edu.vn.

Bài viết lần này là của tác giả Nguyễn Thành Khang, Anh 21- K50 KTĐN - ĐH Ngoại Thương, Huy chương đồng IMO 2011.

Sự ra đời số phức là một bước tiến vĩ đại của Toán học. Số phức đã được sử dụng để giải quyết rất nhiều vấn đề trong Toán học mà trường số thực không giải quyết được. Không chỉ dừng lại ở việc xử lý các vấn đề trong đại số hay giải tích, số phức còn được sử dụng để giải quyết các bài toán Hình học (khi xét tương ứng các điểm với toạ độ trên mặt phẳng phức), các bài toán Số học (đa thức chia đường tròn - *cyclotomic polynomial*, số nguyên Gauss) và các bài toán Tổ hợp.

8.1 Số phức và các tính chất

8.1.1 Số phức

Tập hợp số phức là tập hợp các số có dạng $a + bi$, trong đó $i = \sqrt{-1}$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$.

Với số phức $z = a + bi$ thì a được gọi là phần thực, b được gọi là phần ảo của z.

8.1.2 Số phức liên hợp và mô-đun của số phức

Số phức $\overline{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$.

Số thực $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là mô-đun của số phức $z = a + bi$.

8.1.3 Biểu diễn hình học và dạng lượng giác của số phức

Trên mặt phẳng phức Oxy, số phức $x = a + bi$ sẽ được biểu diễn bằng điểm M có toạ độ (a, b).

Khi đó ta thấy mô-đun của z chính là độ dài đoạn OM, hay $|z| = OM$.

Số đo (bằng radian) góc lượng giác với tia đầu là tia Ox và tia cuối là tia OM được gọi là argumen của z.

Số phức z có mô-đun r và argumen φ có dạng lượng giác là: $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i\varphi}$.

8.2 Một số kết quả cơ bản

8.2.1 Công thức de Moivre

Với số phức $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ và $n \in \mathbb{N}$ thì

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

Từ công thức trên ta suy ra một số phức $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ có đúng n căn bậc n được xác định như sau:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \text{ với } 0\le k<n.$$

8.2.2 Căn bậc n của đơn vị

Trong các bài toán Tổ hợp ứng dụng số phức, chúng ta thường xét đến căn bậc n của đơn vị có dạng $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ với $0\le k<n$.

Kết quả 2.1: Với $\varepsilon\ne 1$ là căn bậc n của đơn vị thì $\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k=0$.

Kết quả trên dễ dàng được suy ra trực tiếp từ hằng đẳng thức $\varepsilon^n-1=(\varepsilon-1)\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k$.

Kết quả 2.2: Với $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdot,\varepsilon_{n-1}$ là các căn bậc n của đơn vị thì $\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon_i^k=\begin{cases} n & \text{, nếu } n\mid k\\ 0 & \text{, nếu } n\nmid k\end{cases}$

Xét $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ là căn bậc n của đơn vị. Khi đó $\varepsilon^m=1$ khi và chỉ khi $n\mid m$.

Với $n\mid k$ hay $k=nq$ với $q\in\mathbb{N}$, ta có: $\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon_i^k=\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon_i^{nq}=\sum_{i=0}^{n-1}(\varepsilon_i^n)^q=\sum_{i=0}^{n-1}1^q=n$.

Với $n\nmid k$, ta có: $\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon_i^k=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\varepsilon^i\right)^k=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\varepsilon^k\right)^i=\frac{1-\left(\varepsilon^k\right)^n}{1-\varepsilon^k}=\frac{1-\left(\varepsilon^n\right)^k}{1-\varepsilon^k}=0$.

Kết quả 2.3: Cho p là một số nguyên tố và $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$. Nếu $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{Q}$ thoả mãn $a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0$ thì $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1}$.

Ta xét các đa thức $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ như sau:

$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{p-1}x^{p-1}$ và $g = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$.

Vì f, g có nghiệm chung nên $\gcd(f, g) \mid g$. Theo tiêu chuẩn Eisenstein thì g bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ nên $\gcd(f, g) = g$, từ đó dẫn tới $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1}$.

8.3 Ứng dụng trong một số bài toán đếm

Bài 1: Có bao nhiêu tập con của tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ có số phần tử chia hết cho 3?

Phân tích: Ta đã biết số tập con k phần tử của một tập hợp n phần tử bằng $\dbinom{n}{k}$. Vậy nên số tập con trong bài toán này chính là $S = \dbinom{100}{0} + \dbinom{100}{3} + \dbinom{100}{6} + \ldots + \dbinom{100}{99}$.

Nếu xét đa thức $f(x) = (1 + x)^{100}$ thì tổng S sẽ bằng tổng các hệ số của các sô hạng bậc chia hết cho 3.

Ta có 2 kết quả quen thuộc: tổng các hệ số của $f(x)$ chính bằng $f(1)$ và tổng các hệ số của các số hạng bậc chẵn của $f(x)$ bằng $\dfrac{f(1) + f(-1)}{2}$. Nhận thấy rằng: 1 được coi là căn bậc 1 của đơn vị và $1, -1$ chính là các căn bậc 2 của đơn vị. Vậy phải chăng trong trường hợp tính tổng các hệ số của các số hạng bậc chia hết cho 3 ta sẽ sử dụng các căn bậc 3 của đơn vị?

Ta có lời giải như sau:

Lời giải: Đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, khi đó $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ là các căn bậc 3 của đơn vị.

Theo kết quả 2.2 ta có: $1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k} = \begin{cases} 3 & \text{, nếu } 3 \mid k \\ 0 & \text{, nếu } 3 \nmid k \end{cases}$

Từ đó suy ra được: $S = \dfrac{f(1)+f(\varepsilon)+f(\varepsilon^2)}{3}$, hay

$S = \dfrac{2^{100}+(1+\varepsilon)^{100}+(1+\varepsilon^2)^{100}}{3} = \dfrac{2^{100}+(-\varepsilon^2)^{100}+(-\varepsilon)^{100}}{3} = \dfrac{2^{100}+2}{3}$.

Bình luận: Từ cách làm bài toán trên, ta có thể chứng minh được các kết quả tổng quát sau:

1.1. Với m, n là các số nguyên dương bất kỳ, ta có:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{m}+\binom{n}{2m}+\ldots = \frac{2^n}{m}\sum_{j=1}^{m}\cos^n\frac{j\pi}{m}\cos\frac{nj\pi}{m}$$

1.2. Cho $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ và ε là căn bậc m $(m \in \mathbb{Z}^+)$ của đơn vị $(\varepsilon \neq 1)$ thì:

$$a_0+a_m+a_{2m}+\ldots = \frac{F(1)+F(\varepsilon)+F(\varepsilon^2)+\ldots+F(\varepsilon^{m-1})}{m}$$

Nhìn nhận theo một hướng khác thì ta có thể thấy rằng ta đã sử dụng hàm sinh $f(x)$ để tính toán tổng S ở trên. Hàm số $f(x) = (1+x)^{100}$ là một hàm số khá đơn giản và quen thuộc đối với các tổng tổ hợp như trên. Trong nhiều tình huống, chúng ta sẽ phải xây dựng một hàm sinh phức tạp hơn, ví dụ như trong bài 3 VMO 2015 dưới đây.

Bài 2: *(VMO 2015)* Cho số nguyên dương k. Tìm số các số tự nhiên n không vượt quá 10^k thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) n chia hết cho 3.

(ii) các chữ số trong biểu diễn thập phân của n thuộc tập hợp $S = \{2, 0, 1, 5\}$.

Lời giải: Xét đa thức

$$f(x) = (x^2 + 1 + x + x^5)^k = \sum_{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S^k} x^{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}.$$

Nhận thấy mỗi bộ $(a_1, a_2, ..., a_k) \in S^k$ sao cho số tự nhiên $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ thoả mãn bài toán sẽ tương ứng với một thừa số trong $f(x)$ có bậc chia hết cho 3.

Đặt $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{5k} x^{5k}$. Khi đó số các số tự nhiên n thoả mãn bài toán chính là $T = \sum_{m=0} a_{3m}$.

Theo kết quả ở trên, ta có: $S = \dfrac{f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2)}{3}$ với $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i \sin\dfrac{2\pi}{3}$

Dễ thấy $S = \dfrac{4^k + \varepsilon^{2k} + \varepsilon^{4k}}{3} = \begin{cases} \dfrac{4^k + 2}{3} & \text{, nếu } 3 \mid k \\ \dfrac{4^k - 1}{3} & \text{, nếu } 3 \nmid k \end{cases}$

Bình luận Bài toán trên hoàn toàn có thể được giải quyết bằng việc xây dựng các công thức truy hồi cho 3 dãy $(a_n), (b_n), (c_n)$ tương ứng với số các số nguyên dương không vượt quá 10^n có các chữ số trong biểu diễn thập phân thuộc S và chia cho 3 lần lượt dư 0, dư 1 và dư 2. Nếu số 3 trong đề bài được thay thế bởi 1 số nguyên dương lớn hơn thì khi đó ta sẽ phải xét nhiều dãy số hơn, công việc này sẽ gây khá nhiều khó khăn cho đối tượng học sinh THPT. Tuy nhiên bằng công cụ hàm sinh kết hợp với số phức thì câu chuyện trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

Bài 3: Có bao nhiêu tập con của tập $\{1, 2, ..., 2016\}$ có tổng các phần tử chia hết cho 5?

Lời giải: Xét đa thức $f(x) = (1+x)(1+x^2)...(1+x^{2016}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$

Số tập hợp cần tìm bằng: $S = \sum_{k=0} a_{5k} = a_0 + a_5 + a_{10} + a_{15} + ...$

Gọi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ là căn bậc 5 của đơn vị.

Ta có: $S = \dfrac{f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + f(\varepsilon^3) + f(\varepsilon^4)}{5}$

Dễ thấy $f(1) = 2^{2016}$.

Vì $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5$ là các căn bậc 5 của đơn vị nên ta có:

$$g(x) = x^5 - 1 = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^4)(x-\varepsilon^5)$$

Suy ra: $(-1-\varepsilon)(-1-\varepsilon^2)(-1-\varepsilon^3)(-1-\varepsilon^4)(-1-\varepsilon^5) = g(-1) = -2$

Hay ta có: $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)(1+\varepsilon^4)(1+\varepsilon^5) = 2$

Do $2016 = 5 \cdot 403 + 1$ dẫn tới

$$f(\varepsilon) = \left[(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)(1+\varepsilon^4)(1+\varepsilon^5)\right]^{403}(1+\varepsilon) = 2^{403}(1+\varepsilon)$$

Tương tự, ta có $f(\varepsilon^k) = 2^{403}(1+\varepsilon^k)$ với $2 \le k \le 4$.

Suy ra: $S = \dfrac{2^{2016} + 2^{403}(4 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4)}{5} = \dfrac{2^{2016} + 3 \cdot 2^{403}}{5}$

Dưới đây là một bài toán rất đẹp và khó xuất hiện trong kỳ thi IMO 1995.

Bài 4: Cho p là số nguyên tố lẻ. Có bao nhiêu tập con A gồm p phần tử của tập hợp $1, 2, \ldots, 2p$ có tổng các phần tử chia hết cho p?

Lời giải: Gọi $\varepsilon \neq 1$ là căn bậc p của đơn vị.

Khi đó: $\prod_{i=1}^{2p}\left(x-\varepsilon^{i}\right)=\left(x^{p}-1\right)^{2}=x^{2p}-2x^{p}+1$.

So sánh hệ số của x^p ta có: $2=\sum \varepsilon^{i_1+i_2+\ldots+i_p}=\sum_{j=0}^{p-1} n_j\varepsilon^j$.

Trong đó tổng thứ nhất tính theo tất cả các tập con p phần tử $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ của $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ và n_j trong tổng thứ hai là số các tập con sao cho $i_1+i_2+\ldots+i_p \equiv j \pmod p$.

Từ đây suy ra ε là nghiệm của đa thức $f(x)=(n_0-2)+\sum_{j=1}^{p-1} n_jx^j$ là một đa thức có bậc $p-1$.

Vì đa thức tối tiểu của ε trên trường $\mathbb{Q}$ là $g(x)=1+x+\ldots+x^{p-1}$ cũng có bậc $p-1$. Suy ra $f(x)$ phải có dạng $kg(x)$ với k là hằng số.

Suy ra: $n_0-2=n_1=n_2=\ldots=n_{p-1}$.

Mà $n_0+n_1+\ldots+n_{p-1}=\binom{2p}{p}$ nên suy ra: $n_0=\dfrac{\dbinom{2p}{p}-2}{p}+2$.

8.3.1 Ứng dụng trong một số bài toán về phủ bảng vuông

Trước tiên, ta sẽ làm rõ một số quy ước liên quan đến bảng vuông như sau:

- Bảng vuông $m\times n$ có m hàng, n cột.
- Ô vuông nằm ở vị trí giao giữa hàng thứ i và cột thứ j được ký hiệu là (i, j).

Chúng ta sẽ mở đầu bằng bài toán sau:

Bài 5: Cho k là một số nguyên dương. Tìm điều kiện của m, n sao cho có thể phủ kín bảng $m \times n$ bằng các bảng con $1 \times k$ và $k \times 1$.

Lời giải: Đặt $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{k} + i\sin\dfrac{2\pi}{k}$ là căn bậc k của đơn vị. Tại ô vuông (i, j) ta viết số ε^{i+j}.

Khi đó mỗi bảng con $1 \times k$ và $k \times 1$ sẽ chứa đúng k số $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{k-1}$, suy ra tổng các số trên mỗi bảng con này bằng 0. Từ đó dẫn tới tổng các số trên cả bảng vuông lớn bằng 0.

Mặt khác, tổng các số trên các ô vuông là: $\sum\limits_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \varepsilon^{i+j} = \sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon^i \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon^j$.

Suy ra: $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon^i = 0$ hoặc $\sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon^j = 0$. Theo kết quả 2.2 thì k là ước của m hoặc k là ước của n.

Dễ thấy rằng nếu k là ước của m hoặc k là ước của n thì bảng vuông $m \times n$ có thể phủ kín bằng các bảng con $1 \times k$ và $k \times 1$.

Hoàn toàn tương tự, ta có thể giải quyết được bài toán sau một cách dễ dàng bài toán sau:

Bài 6: Một bảng vuông có thể được phủ kín bằng các bảng con $1 \times m$ và $n \times 1$. Chứng minh rằng bảng vuông đó có thể phủ kín mà chỉ sử dụng bảng con $1 \times m$ hoặc chỉ sử dụng bảng con $n \times 1$.

Lời giải: Giả sử bảng vuông đã cho có kích thước $k \times l$.

Đặt $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{m} + i\sin\dfrac{2\pi}{m}, \omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ lần lượt là căn bậc m, n của đơn vị.

Tại ô vuông (i, j) ta viết số $\varepsilon^i\omega^j$.

Khi đó mỗi bảng con $1 \times m$ và $n \times 1$ có tổng các số bằng 0. Từ đó dẫn tới tổng các số trên cả bảng vuông lớn bằng 0.

Mặt khác, tổng các số trên các ô vuông là: $\sum\limits_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le l}} \varepsilon^i\omega^j = \sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon^i \sum\limits_{j=1}^{l}\omega^j$.

Suy ra: $\sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon^i = 0$ hoặc $\sum\limits_{j=1}^{l}\omega^j = 0$. Theo kết quả 2.2 thì m là ước của k hoặc n là ước của l.

Dễ thấy rằng nếu m là ước của k hoặc n là ước của l thì bảng vuông đó có thể phủ kín mà chỉ sử dụng bảng con $1 \times m$ hoặc chỉ sử dụng bảng con $n \times 1$.

Dưới đây là một số bài toán sử dụng số phức trong các bài toán bảng vuông nhưng phức tạp hơn.

Bài 7: Cho bảng vuông 13×13. Hỏi có thể phủ bảng vuông đã cho bằng các bảng con 1×4 và 4×1 sao cho ô vuông ở tâm là ô vuông duy nhất không được phủ?

Phân tích: Trước tiên ta sẽ thử điền các số vào bảng vuông như 2 bài toán trên.

Điền vào ô vuông (j, k) số phức i^{j+k}. Khi đó tổng các số trên mỗi bảng con 1×4 và 4×1 đều bằng 0.

Giả sử tồn tại cách phủ bảng vuông đã cho bằng các bảng con 1×4 và 4×1 sao cho ô vuông ở tâm là ô vuông duy nhất không được phủ thì tổng các số trên bảng sẽ bằng số được ghi tại ô vuông ở tâm.

Số được ghi tại ô vuông ở tâm là $i^{14} = i^2$, và tổng các số ghi trên bảng là $\sum\limits_{j=1}^{13} i^j \sum\limits_{k=1}^{13} i^k = i^2$. Ta chưa nhận được mâu thuẫn từ đây.

Bằng một chút thay đổi nhỏ trong việc ghi các số trên bảng, ta sẽ nhận được lời giải sau.

Lời giải: Điền vào ô vuông (j,k) số phức i^{j+2k}. Khi đó tổng các số trên mỗi bảng con 1×4 và 4×1 đều bằng 0.

Giả sử tồn tại cách phủ bảng vuông đã cho bằng các bảng con 1×4 và 4×1 sao cho ô vuông ở tâm là ô vuông duy nhất không được phủ thì tổng các số trên bảng sẽ bằng số được ghi tại ô vuông ở tâm.

Số được ghi tại ô vuông ở tâm là $i^{21}=i$, và tổng các số ghi trên bảng là $\sum\limits_{j=1}^{13} i^j \sum\limits_{k=1}^{13} i^{2k} = i^3 = -i$, vô lý.

Bài 8: *(Russia 2000)* Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho bảng vuông $n\times n$ có thể phủ được bằng các bảng vuông 40×40 và 49×49 và cả 2 loại bảng con đều được sử dụng.

Lời giải: Đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{40} + i\sin\frac{2\pi}{40}, \omega = \cos\frac{2\pi}{49} + i\sin\frac{2\pi}{49}$ lần lượt là căn bậc $40, 49$ của đơn vị.

Điền vào ô vuông (i,j) số phức $\varepsilon^i\omega^j$. Khi đó tổng các số trên mỗi bảng con 40×40 và 49×49 đều bằng 0.

Mặt khác, tổng các số trên các ô vuông là: $0 = \sum\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \varepsilon^i\omega^j = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon^i \sum\limits_{j=1}^{n} \omega^j$.

Suy ra, n chia hết cho 40 hoặc n chia hết cho 49.

Gọi x, y lần lượt là số bảng con 40×40 và 49×49 được sử dụng. Khi đó ta có: $40^2x + 49^2y = n^2$.

Nếu $40 \mid n$, thì $40^2 \mid n^2 \Rightarrow 40^2 \mid 49^2 y \Rightarrow 40^2 \mid y$. Khi đó: $n^2 > 49^2\cdot 40^2 = 1960^2$. Mà $40 \mid n$ nên $n \ge 2000$.

Nếu $49 \mid n$, thì $49^2 \mid n^2 \Rightarrow 49^2 \mid 40^2 x \Rightarrow 49^2 \mid x$. Khi đó: $n^2 > 49^2\cdot 40^2 = 1960^2$. Mà $49 \mid n$ nên $n \ge 2009$.

Ta sẽ chứng minh, $n = 2000$ thoả mãn bài toán.

Thật vậy, ta chia bảng vuông 2000×2000 thành 1 bảng con 1960×1960 và 99 bảng con 40×40. Bảng con 1940×1940 có thể được lát bằng 40^2 bảng con 49×49.

Vậy $n = 2000$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

8.4 Các bài toán tương tự

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó không chứa chữ số 0 và chia hết cho 11?

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 7, có n chữ số và mỗi chữ số được lấy từ tập hợp $\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$?

Bài 3: Cho p là một số nguyên tố. Có bao nhiêu tập con S của tập hợp $\{1, 2, \ldots, p\}$ sao cho tổng các phần tử của S chia hết cho p?

Bài 4: Cho bảng vuông 50×50 được phủ bằng các bảng vuông 1×7 và 7×1 sao cho chỉ có duy nhất 1 ô vuông không được phủ. Tìm tất cả các vị trí có thể có của ô vuông đó.

Bài 5: Một bảng con *kỳ dị* là bảng con được tạo thành bằng cách bỏ đi ô vuông chính giữa từ bảng 1×3. Một bảng vuông 8×9 được phủ bởi các bảng con *kỳ dị* và các bảng con 3×1 sao cho không có ô vuông nào được phủ bởi nhiều hơn 1 bảng con. Chứng minh rằng tồn tại tập hợp S gồm 18 ô vuông của bảng sao cho nếu có đúng 2 ô vuông không được phủ thì 2 ô vuông đó thuộc S.

Bài 6: Cho p, q, r là các số nguyên tố phân biệt và N là số nguyên dương thoả mãn $N > 2pqr$. Chứng minh rằng có thể phủ kín bảng vuông $N \times N$ bằng các bảng con $p \times p$, $q \times q$ và $r \times r$.

Phương pháp đếm Chisanbop

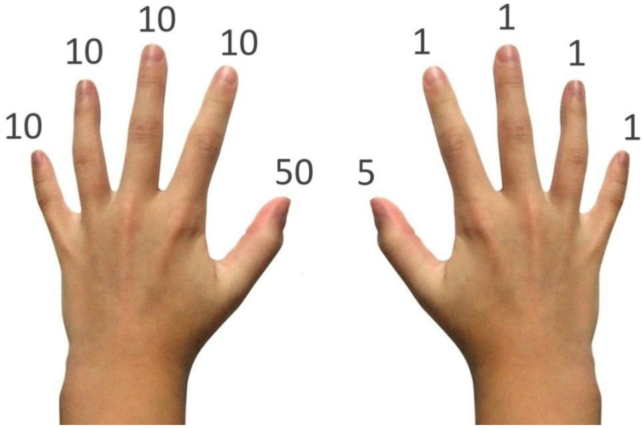
Nguyễn Đức Anh

Chuyên mục STEM của Sputnik Newsletter do Mõ STEM Đỗ Hoàng Sơn (người sáng lập công ty giáo dục Long Minh) phụ trách. Bài viết lần này là của tác giả Nguyễn Đức Anh từ Học Viện STEM.

Bạn có biết rằng bạn có thể đếm tới số 99 bằng ngón tay theo phương pháp "Chisanbop - Chisenbop" - Phương pháp đếm số theo kiểu bàn tính không? Khi bạn đã học được cách tính này, bạn có thể sử dụng nó để làm những phép tính phức tạp hơn với các ngón tay của mình, ví dụ như phép nhân những số có hai chữ số.

Chisanbop hay Chisenbop là một từ bắt nguồn từ một cụm tiếng Hàn Quốc gốc Hán (chi (ji) finger + sanpop (sanbeop) calculation): 지산법/指算法. (Nếu phiên âm Hán-Việt sẽ thành "chỉ toán pháp").

Đây là một kiểu định nghĩa phép đếm sử dụng các ngón tay để biểu diễn các con số trong hệ đếm thập phân. Phương pháp đếm này được sáng tạo từ những năm 1940 ở Hàn Quốc bởi cụ ông Sung Jin Pai. Sau đó, người con trai của ông là Hang Young Pai đã hoàn thiện và áp dụng rộng rãi tại Mỹ vào năm 1977. Với phương pháp đếm này, chúng ta có thể sử dụng hai bàn tay để biểu diễn các số từ 0 đến 99.



Định nghĩa giá trị biểu diễn của các ngón tay

Theo đó, phương pháp đếm này, tay trái thể hiện phép toán biểu diễn hàng chục trong khi tay phải biểu diễn cho kết quả của hàng đơn vị. Đối với mỗi bàn tay, giá trị thể hiện của ngón tay cái là lớn nhất (50 – ngón tay cái bên trái; và 5 – ngón tay cái bên phải). Ngoài ra, các ngón tay khác của tay phải thể hiện giá trị đơn vị trong khi đó là giá trị tròn chục đối với những ngón khác ở tay trái. Ví dụ: Để biểu diễn số 69, ta có thể hình dung: Tay trái (hàng chục): sử dụng các ngón cái (50) và ngón trỏ (10) để biểu diễn: 50 + 10 = 60 Tay phải (hàng đơn vị): sử dụng ngón cái (5) và 4 ngón (1) còn lại để biểu diễn: 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9 Như vậy, sau khi sử dụng các ngón tay trên, chúng ta sẽ có được kết quả biểu diễn số 69 trên hai bàn tay (60 + 9 = 69)

Với ý tưởng khá đơn giản và gần gũi với học tập, một nhóm các học sinh tiểu học của Học Viện STEM đã vận dụng các kiến thức và

Cách biểu diễn số theo phương pháp Chisenbop

kỹ năng của bộ môn STEM Khoa học máy tính đã cho ra đời một sản phẩm phục vụ nhu cầu học tập và giải trí nhằm đem lại hứng thú, say mê cho các bạn học sinh nhỏ tuổi cũng như cung cấp cho giáo viên một công cụ hữu hiệu trong việc giảng dạy tại trường. Các bạn học sinh có thể truy cập tại địa chỉ

https://scratch.mit.edu/projects/154270576/

để có thể trải nghiệm và khám phá thêm nhé!

Bí quyết của hạnh phúc

Nguyễn Tiến Dũng

Từ ngàn xưa đến nay, hạnh phúc luôn là chủ đề trọng tâm của loài người. Hàng năm có đến hàng nghìn đầu sách được xuất bản trên thế giới về chủ đề này. Bản Tuyên ngôn độc lập của Mỹ năm 1776 cũng có ghi ba quyền cơ bản nhất của con người là: sống, tự do, và mưu cầu hạnh phúc. Và Tuyên ngôn về quyền con người của Pháp năm 1789 cũng có ghi ngay trong lời nói đầu rằng mục đích của xã hội phải là đem lại hạnh phúc cho mọi người.

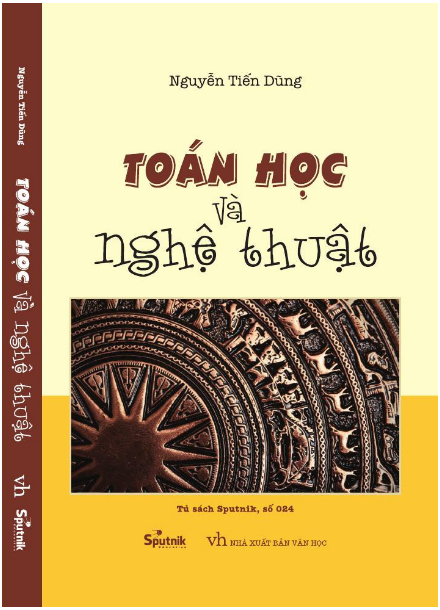
Hạnh phúc là một khái niệm cơ bản, nhưng cũng rất phức tạp, được hợp thành từ nhiều yếu tố khác nhau như: khỏe mạnh, sung túc, thỏa mãn, hưởng khoái lạc, sống có mục đích, có đạo đức, có hiểu biết, có niềm tin, có tương lai, có con cái, hòa hợp tự nhiên, được quí trọng, thành công, may mắn, v.v.

Do mỗi người có đánh giá khác nhau về việc cái gì là quan trọng hơn cái gì trong các yếu tố tạo nên hạnh phúc (hay sự thiếu vắng nó tạo nên khổ đau, trái ngược lại của hạnh phúc), nên chúng ta có rất nhiều quan niệm về hạnh phúc khác nhau. Và có những người coi là chỉ có những thời điểm hạnh phúc, trong khi những người khác coi hạnh phúc là cả quá trình dài, có khi là cả cuộc đời và cả những gì xảy ra sau khi chết.

Thậm chí, một số triết lý tôn giáo coi phần lớn những yếu tố đem lại hạnh phúc trong cuộc sống hiện tại không phải là hạnh phúc đích thực, mà chỉ có "tu luyện" để đạt hạnh phúc "ở những kiếp sau" hay "ở trên thiên đàng" mới là hạnh phúc thực sự. Có những nhà triết học như Nietzsche coi rằng hạnh phúc không quan trọng bằng các thứ khác, “thà làm một Socrates đau khổ còn hơn làm một con bò hạnh phúc”. Tuy nhiên, có thể hiểu ý của họ là “Socrates đau khổ” vẫn “hạnh phúc hơn” so với “con bò hạnh phúc”.

Những câu hỏi kiểu “người ta hạnh phúc là vì người ta sống tuân thủ đạo đức, hay ngược lại bản thân chuyện người ta thấy hạnh phúc chứng tỏ người ta đạo đức ?” cũng có thể bàn luận rất lâu. Nhưng bài viết này không đi sâu vào khía cạnh triết học của hạnh phúc, mà chỉ nhằm trả lời câu hỏi thiết thực sau: ***Làm sao để mỗi chúng ta có được hạnh phúc hơn, trong điều kiện hiện tại?***

* * *



Nghệ thuật – một yếu tố giúp ta hạnh phúc.

Có nhiều con đường hạnh phúc khác nhau

Thậm chí nhiều khi có vẻ trái ngược nhau.

Giống như là một bài toán có thể có nhiều cách giải, con đường này đúng không có nghĩa là con đường khác sai. Ví dụ, khi một người rất muốn một cái gì đó mà không thể đạt được, thì đó là lý do gây bất hạnh. Có thể giải quyết bằng cách từ bỏ ham muốn (như đạo Phật), hoặc giữ lạc quan và quyết tâm phấn đấu để đạt nó (nét đặc trưng của nhiều người thành công lớn), hoặc thay thế bằng các ham muốn khác dễ đạt được hơn mà vẫn đem lại sự thỏa mãn, v.v. Nhưng dù là con đường nào thì cũng có hai cách chính: *Giảm các yếu tố gây bất hạnh và tăng các yếu tố gây hạnh phúc.*

Quyển sách "The happiness paradox" (Nghịch lý hạnh phúc, 2014) của nhà tâm lý học Ziyad Marar có bàn về sự đối ngược nhau của các trường phái khác nhau. Ví dụ có trường phái tôn vinh tự do, theo nghĩa dám thoát khỏi lề thói, thì lại có trường phái tôn vinh sự hòa mình vào cộng đồng. Cuối cùng thì tất cả các thái cực đó đều là các khía cạnh khác nhau của cùng một vấn đề. Mỗi người có thể tự chọn cho mình một con đường thích hợp với tính cách, với "sứ mệnh" của mình nhất, miễn sao không làm hại người khác.

Yếu tố lớn nhất để một người cảm thấy hạnh phúc nằm trong chính bản thân người đó, trong não của người đó

Để cảm thấy hạnh phúc, thì điều quan trọng nhất là phải chọn hạnh phúc, tin vào hạnh phúc. Kể cả không có chân có tay như anh Nick Vujicic vẫn rất hạnh phúc. So với anh ta thì các nỗi đau khổ của nhiều người tự coi mình là bất hạnh có lẽ chhưa thấm vào đâu, chỉ cần họ thay đổi quan điểm là sẽ thấy mình hạnh phúc lên nhiều.

Người Anh có câu: "Pain is inevitable, but suffering is optional" (có những tai họa không tránh được, nhưng không nhất thiết phải đau khổ). Nói theo hòa thượng Thích Nhất Hạnh, chúng ta đau khổ chủ yếu là do hiểu nhầm bản chất vấn đề, khi hiểu đúng sẽ hết đau khổ. Kể cả những người phải đối mặt với cái chết của người thân hay của chính mình cũng sẽ trở nên bình thản khi hiểu đúng bản chất của cuộc sống.

Giáo dục chính là một yếu tố quan trọng đem lại hạnh phúc

Bởi vì nó làm tăng sự hiểu biết.

Các thống kê trên thế giới cho thấy, những người được học nhiều hơn, có hiểu biết cao hơn, thì cảm thấy hạnh phúc hơn. Và những người ở độ tuổi từ trung niên trở ra ở Mỹ lại cảm thấy hạnh phúc hơn là những người còn thanh niên. Một lý do chính có lẽ là những người này hiểu biết hơn về bản chất cuộc sống so với thanh niên, và ít bị bất mãn do không còn đặt cho mình những kỳ vọng không tưởng.

"Chọn hạnh phúc" có nghĩa là chọn cách nhìn lạc quan

Hay nói theo nhà tâm lý học hiện đại Martin Seligman là chọn "positive thinking" (suy nghĩ tích cực). Theo cái nhìn lạc quan, thì chúng ta thấy có rất nhiều thứ đáng để chúng ta hạnh phúc, nhiều hơn nhiều so với những thứ làm chúng ta khổ đau. Bản thân việc chúng ta được làm người biết suy nghĩ cũng đã là một yếu tố hạnh phúc vô cùng lớn lao. Người lạc quan cũng ít bị bệnh tật hơn, dễ dàng vượt qua bệnh tật khi có bệnh hơn, sống lâu hơn, làm việc hiệu quả hơn, v.v. so với là người bi quan. Bởi vậy hãy lạc quan lên!

* * *

Nói thì dễ, nhưng làm có lẽ khó hơn.

Về mặt lý tưởng, con người sinh ra là để hạnh phúc. Nhưng trên thực tế, tỷ lệ người cảm thấy bất hạnh trên thế giới còn rất lớn, và không có vẻ giảm đi theo thời gian, dù rằng loài người đã đạt được rất nhiều tiến bộ. Một phần là do khi điều kiện sống tốt lên, thì đòi hỏi và kỳ vọng của con người cũng tăng lên theo.

Ví dụ như hệ thống nước nóng trong nhà, khi mới có thì sướng, nhưng khi quen rồi thì coi nó là nghiễm nhiên, không sướng thêm nữa, mà thiếu nó thì thấy khổ. Mặt khác, có nhiều nhu cầu cơ bản phi vật chất của con người mà xã hội hiện đại chưa chắc đã đáp ứng tốt hơn ngày xưa, ví dụ như nhu cầu về cái "tôi", về tình bạn, nhu cầu được yên tĩnh, v.v.

Quyển sách "The happiness trap" (cái bẫy của hạnh phúc, hay nói chính xác hơn là những cái bẫy trên đường tìm hạnh phúc) của bác sĩ Russ Harris xuất bản năm 2006 có đưa ra những con số thống kê rất đáng ngại về tỷ lệ người cảm thấy bất hạnh:

Theo Tổ chức Y tế thế giới (WHO), thì bệnh trầm cảm đang trở thành căn bệnh lớn thứ hai về tác hại trên thế giới. Trong bất kỳ một tuần nào cũng có khoảng 10% dân số rơi vào trầm cảm ở mức bệnh lý. Và có đến gần một nửa số người trưởng thành sẽ gặp phải những giai đoạn trong cuộc đời khiến họ đau khổ đến mức suy nghĩ về chuyện tự tử trong ít nhất 1-2 tuần liền.

Việt Nam có lẽ cũng không là ngoại lệ, vì theo một bảng xếp hạng gần đây về thỏa mãn trong cuộc sống thì Việt Nam chỉ đứng thứ 95 trên thế giới.

(Xem http://en.wikipedia.org/wiki/Satisfaction_with_Life_Index)

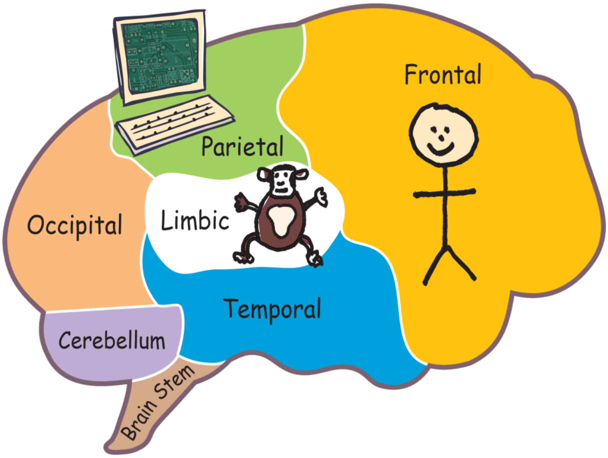
Những người có các vấn đề về tâm lý, không phải do người ta muốn vậy, mà thường là do hoàn cảnh xô đẩy và các yếu tố ban đầu từ khi còn bé tạo nên vậy. Ví dụ, một trẻ nhỏ được giáo dục kiểu quá hà khắc, không dám thể hiện các ý thích của mình, thì khi lớn lên dù có thành công trong công việc và được bạn bè yêu quí vẫn đem trong người một nỗi ức chế về tình cảm khó vượt qua.

Rất may, khoa học về thần kinh (***neuroscience***) ngày nay đã phát triển đến mức đưa ra được những lời giải đáp mang tính khoa học tự nhiên cho các hiện tượng bất hạnh về tâm lý, và qua đó các nhà tâm lý và y học có thể đề ra được các biện pháp hiệu quả nhằm cải thiện tình hình.

* * *

Bộ não của con người rất phức tạp. Nhưng để đơn giản hóa cho dễ hình dung, ta có thể dùng mô hình mà tiến sĩ tâm lý học Steve Peters, cố vấn tâm lý cho các vận động viên olympic quốc tế, trình bày trong quyển sách “The chimp paradox: the mind management programme for confidence, success and happiness” (Nghịch lý con khỉ) xuất bản năm 2012.

Theo mô hình này, các bộ phận có chức năng suy nghĩ và quyết định của não được chia thành 3 phần:phần “lý trí” là phần não ở phía trước, phần “bản năng” là phần não nằm trong, và phần “tự động” là phần não nằm ở hai bên. Ba phần đó được gọi một cách ví von là phần “Người” (human), phần “Khỉ” (chimp), và phần “Máy tính” (computer). Cả ba phần hợp lại với nhau tạo thành nhân cách của con người.



Về tốc độ suy nghĩ thì “Máy tính” nhanh gấp 20 lần “Người”, và “Khỉ” nhanh gấp 5 lần “Người”. Trong mỗi thời điểm, phần nào mà được máu chảy vào nhiều hơn thì đó là phần được sử dụng nhiều hơn để suy nghĩ và ra quyết định. Hầu hết các việc làm “theo thói quen” như đi lại, ăn uống, hay ngay các động tác đá bóng, là do “Máy tính” đảm nhiệm một cách “tự động”, hay có thể gọi là “vô thức”, không cần sự chú ý của “Khỉ” và “Người”.

Mỗi khi có thông tin lạ, gây chú ý, thì nó qua “Khỉ” trước rồi mới đến “Người”. “Khỉ” suy nghĩ theo cảm xúc, và được kích hoạt mạnh khi có tín hiệu gì đó đụng đến bản năng sống còn. (“Bạn tình đấy, thích quá, xông đến đi”, “nó chiếm lãnh thổ của mình, giận quá, tấn công nó đi”, “sợ quá, chạy đi”, v.v.), còn nếu nó không thấy tín hiệu có tính sống còn thì nó để cho “Người” hoặc “Máy tính” xử lý.

Nhiều quyết định do “Khỉ” tạo ra có thể hợp với môi trường hoang dã, nhưng không hợp với xã hội hiện tại, và chỉ dựa trêm cảm giác chứ không dựa trên phân tích kỹ. Bởi vậy mà con người có những lúc có thể có những hành vi "như khỉ": bộp chộp, thiếu suy nghĩ, thiếu lý trí (irrational), v.v. Khi phần "Người" kịp suy nghĩ, dựa trên các thông tin chính xác hơn chứ không chỉ là cảm giác, thì dẫn đến các quyết định tinh tế hơn "Khỉ", có thể theo chiều hướng hoặc trái lại quyết định của "Khỉ".

Ví dụ, "Khỉ" giận dữ nhưng "Người" kiềm chế lại các hành động thô bạo. Tuy nhiên, nếu "Khỉ" không hài lòng với quyết định của "Người", thì nó sẽ dằn vặt không yên, gây khó chịu trong nội tâm.

Mỗi khi có "mâu thuẫn nộ bộ" mạnh, nếu "Người" đối đầu vời "Khỉ" thì sẽ thua, vì "Khỉ" khỏe hơn "Người" gấp mấy lần.

Cách giải quyết là "điều khiển Khỉ", bằng 3 bước khác nhau: bước 1) "Cho Khỉ xả hơi". (Đang buồn thì cứ để khóc lóc, đang cáu thì cứ để chửi bới, cho hết cơn đi, miễn sao không ảnh hưởng xấu đến người khác). Trong lúc "Khỉ" đang tuôn ra như vậy thì không "đấu lý" với "Khỉ" được, phải đợi một lúc sau khi Khỉ đã tuôn ra đủ rồi và mệt rồi, thì mới đến bước 2) "Cho Khỉ vào hộp". Ở bước này, dùng lý lẽ logic phân tích về quyết định của phần "Người" để trấn an "Khỉ". Ngoài ra, còn có thể dùng một bước thứ 3, độc lập với hai bước trên, đó là "Cho Khỉ ăn chuối".

Ví dụ, ta có một đống email phải trả lời, mà con "Khỉ" trong ta lại không muốn ta làm việc. Khi đó, nếu ta đặt phần thưởng "sau khi trả lời 5 email sẽ được uống cà phê" thì có thể "Khỉ" vì cà phê mà giúp ta tập trung viết email trả lời. Tuy nhiên, bước 3 này chỉ nên coi là một bước bổ sung, không nhất thiết phải dùng.

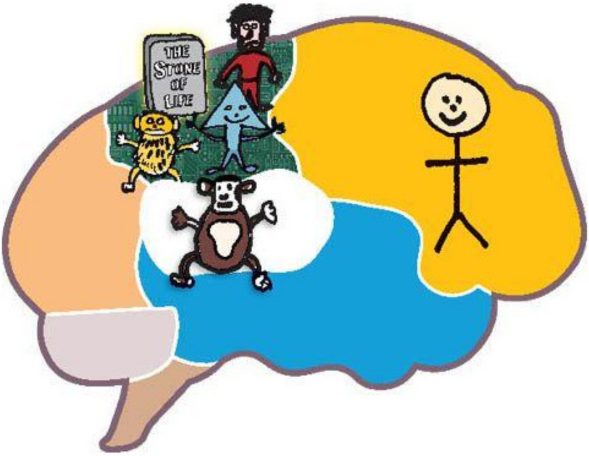
Để làm cho phần "Khỉ" dễ điều khiển hơn, ít mâu thuẫn nội tâm hơn, thì ta phải "nuôi nấng" nó, tức là tìm cách thỏa mãn các nhu cầu bản năng của nó. Ví dụ, nếu “Khỉ” có bản năng về quyền lực cao, thì tham gia các môn thể thao có thể là một cách làm thỏa mãn bản năng đó.

Nhà tâm lý học Freud của thế kỷ trước có xu hướng qui các nhu cầu bản năng về tình dục. Nhưng thực ra, ngoài tình dục, con “Khỉ” trong ta còn có các nhu cầu bản năng sống còn khác, như là: ăn uống, an toàn, bầy đàn (vì lẻ loi trong rừng thì dễ bị tiêu vong), chăm sóc con (đặc biệt đối với phụ nữ), lãnh thổ, quyền lực, chỗ trú ẩn, khám phá xung quanh, cái “tôi”, v.v.

Một ví dụ thú vị là, một cách bản năng, trẻ em ở đâu cũng thích chơi trốn tìm. Nếu một nhu cầu bản năng mạnh mẽ quan trọng nào đó mà không được đáp ứng thì dễ gây ra bất hạnh.

Phần “Máy tính” trong não người chứa 4 thứ khác nhau, được gọi tên là: các autopilot (lái tự động), các gremlin (quỉ nhỏ), các goblin (quỉ dữ), và stone of life (tảng đá cuộc sống). Cả bốn phần này đều là do thông tin từ “Khỉ” và “Người” nhập vào “Máy tính” sau các trải nghiêm. Các autopilot là các kỹ năng, hành vi tự động có ích cho ta trong cuộc sống. Ví dụ, kĩ năng đi xe đạp là một autopilot, ngồi lên xe là đi được mà không cần nghĩ xem phải làm thế nào.

“Tảng đá cuộc sống” là các điều cơ bản về cuộc sống mà người ta coi là đúng đắn, coi là các sự thật và giá trị đạo đức, dựa vào đó mà đưa ra các quyết định hành động. Ví dụ, một sự thật cơ bản là “cuộc sống không công bằng”. Tất nhiên, chúng ta muốn được thế giới đối xử công bằng, nhưng phải chấp nhận một điều là không phải lúc nào cũng có công bằng. Biết như vậy, thì khi ta là nạn nhân của một điều mà ta coi là bất công, ta sẽ bình tĩnh suy nghĩ nên xử sự ra sao chứ không vội vàng nóng nảy.



Các gremlin là những thói xấu hay những sự hiểu sai mà có thể sửa được, tống khứ được ra ngoài nếu phát hiện ra. Một ví dụ là khi một cô gái bị bạn trai lừa, thì phần "Người" có thể ghi vào trong "Máy tính" là "bạn trai có thể lừa mình", nhưng phần "Khỉ" có thể tạo ra một gremlin dạng "bọn con trai toàn Sở Khanh". Con gremlin đó sẽ ảnh hưởng xấu đến quan hệ của cô cái với các đàn ông khác, một yếu tố cản trở hạnh phúc, nhưng có thể loại nó ra khỏi đầu nếu nhận biết ra nó.

Các goblin là những thứ xấu mà đã được khắc sâu vào não, thường là do được "nhồi sọ" từ bé, hoặc do những chấn động rất mạnh tạo ra, nói chung không thể tẩy rửa được, mà chỉ có thể chung sống với nó và hạn chế ảnh hưởng xấu của nó. Ví dụ, khi một phụ nữ dã bị nhồi sọ từ bé là "đàn bà là hèn hạ hơn đàn ông" thì rất khó vượt khỏi mặc cảm về thân phận phụ nữ. Hay một ví dụ khác, nếu một đứa trẻ từ bé tí đã được "dạy" là các thành tích là quan trọng nhất, thì lớn lên sẽ bị bệnh chạy theo thành tích dù đó là thành tích rởm.

"Máy tính" không chỉ có chức năng "xử lý tự động", mà còn có chức năng "thư viện" cho "Khỉ" và "Người". Mỗi khi cần tra cứu để xử lý cái gì đó thì "Khỉ" và "Người" gọi đến "Máy tính". Cũng có những khi "Khỉ" đúng mà "Người" lại sai. Đó là khi "Khỉ" sự dụng được tảng đá cuộc sống và các autopilot, trong khi "Người" lại vớ phải các gremlin và goblin trong "Máy tính". Ví dụ ta gặp một người không đáng tin, con "Khỉ" cảm nhận được điều đó trong khi "Người" dùng lý trí xét thấy mọi thứ có vẻ OK.

Trong bộ não của ta có thể chứa nhiều con gremlin và goblin làm hại ta, gây cho ta bất hạnh. Các gremlin và goblin này được phân tích trong nhiều tài liệu khác nhau về vấn đề hạnh phúc. Ví dụ, như trong sách "F**k it therapy: The profane way to profound happiness" của John Parkin xuất bản năm 2012 có chỉ ra, khi chúng ta coi trọng cái gì quá, tưởng chừng như không thể sống thiếu nó (bất kể là cái gì), thì đó cũng là một thứ gremlin hay goblin gấy bất hạnh, chỉ cần nhìn ra xung quanh sẽ thấy bao nhiêu người không có cái đó vẫn sống hạnh phúc được có sao đâu.

Nói theo văn hóa phương Đông, là nên coi mọi thứ "nhẹ tựa lông hồng" thì sẽ dễ bình thản, có "hòa bình trong nội tâm", dễ đạt hạnh phúc hơn. Những mặc cảm (bất kể về cái gì), những định kiến, những sự không tưởng, những oán hận, v.v. cũng đều là các gremlin hay goblin cản trở hạnh phúc. Hành động tha thứ không những chỉ có tác dụng cho người được tha thứ, mà có lợi cho cả người tha thứ, vì khi tha thứ là tống khứ được một gremlin ra khỏi đầu.

Ngoài việc "nuôi dưỡng Khỉ" (thỏa mãn các nhu cầu bản năng), "điều khiển Khỉ" (giải quyết các xung đột nội tâm), và tìm và tống khứ các gremlin (các con quỉ nhỏ) ra khỏi đầu, một việc làm rất cần thiết khác để đạt hạnh phúc là tích lũy nhiều thêm các "autopilot" và củng cố thêm "tảng đá cuộc sống" qua luyện tập và trau dồi kiến thức văn hóa, và nhận biết các "goblin" để khống chế chúng.

Ví dụ, cuốn sách thú vị "The 100 simple secrets of happy people" của tiến sĩ David Niven xuất bản năm 2000 (và đã được dich ra 30 thứ tiếng khác nhau) có đưa ra 100 lời khuyên cụ thể cho việc củng cố "Máy tính", kèm theo trích dẫn về các công trình nghiên cứu của hàng trăm nhà khoa học khác nhau làm cơ sở cho các lời khuyên đó. Ví dụ một số lời khuyên trong đó: tình bạn quan trọng hơn là tiền bạc, bận bịu tốt hơn là nhàn chán, từ thiện đi đôi với hạnh phúc, hãy chấp nhận mình dù mình ra sao, nên nhập một hội nào đó, v.v.

Không chỉ phần "Khỉ" cần được thỏa mãn, mà phần "Người" cũng cần được thỏa mãn để đạt đến hạnh phúc ở tầm cao hơn. Phần "Người" hướng tới các giá trị tinh thần. Khi đạt được một giá trị tinh thần lớn nào đó, ví dụ như khi một nhà khoa học khám phá được một qui luật tự nhiên quan trọng, một nhà công nghệ nhìn thấy sản phẩm "con đẻ" của mình, hay khi một nhà cải cách nhìn thấy sự tiến bộ xã hội theo ý mình, thì có thể đạt được một sự hạnh phúc vô cùng lớn lao, có thể ví như là một nguồn năng lượng lớn bên trong người giúp vượt được qua mọi thử thách khác.

Tương tự như vậy, những người có một niềm tin lớn lao vào một cái gì đó (ví dụ như là những người theo tôn giáo thực sự, bất kể tôn giáo nào) thì niềm tin đó như là một phần của tảng đá cuộc sống, giúp người đó có được cảm giác hạnh phúc và vượt được lên trên các nỗi đau khổ thường ngày.

Nếu có được sự trợ giúp của người hướng dẫn hay chuyên gia tâm lý nào đó thì việc củng cố tinh thần của chúng ta càng thuận tiện hơn. Trong những trường hợp mất thăng bằng nặng (ví dụ như bị bệnh trầm cảm), thì cần có sự hỗ trợ của bác sĩ, và có thể cần uống thuốc để điều các chất hóa học trong cơ thể cho thăng bằng lại. Chúng ta cũng có thể giúp đỡ những người xung quanh đạt được bộ não hạnh phúc hơn cũng bằng các biện pháp như trên.

Đặc biệt là đối với trẻ em, rất cần được quan tâm chăm sóc đến các nhu cầu bản năng (được ăn uống, được có cảm giác an toàn, được yêu thương, được hoạt động, được chơi với bạn, v.v.) và được giáo dục những điều đúng đắn ngay từ bé, thì lớn lên mới dễ có được hạnh phúc nội tại.

Cái dốt của người nay: Không ai dốt ngoại ngữ bẩm sinh

Lão Tao

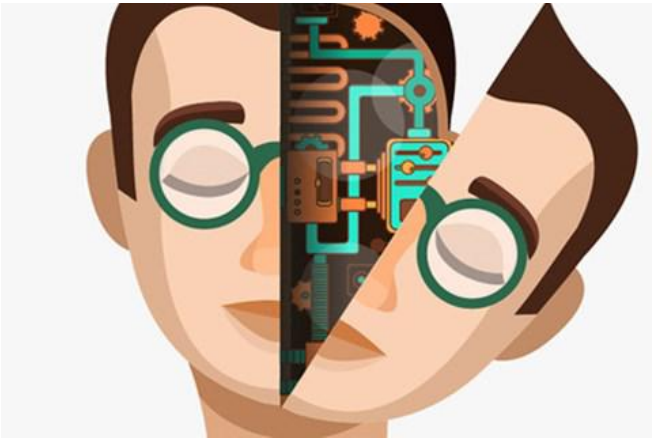
Lão Tao Phạm Anh Tuấn là Tiến sĩ ngành hoá dầu và là người sáng lập Trung tâm dạy bơi E-Bơi (http://www.eboi.vn). Lão Tao cũng là tác giả của một số cuốn sách về kỹ năng sống cho trẻ em, như ***"Thủ thì thủ thì cái gì nguy hiểm", "Bơi tự cứu Dịch cân kinh", "Để phòng đuối nước bạn ơi. . . "*** v.v., đã và sẽ được xuất bản trong Tủ sách Sputnik.

Tháng 3/2017, Sputnik Newsletter đã giới thiệu mục ***Dốt 1***, phần đầu tiên của bản thảo cuốn sách ***"50 cái dốt của người nay"*** mà Lão Tao ấp ủ viết như một kiểu "Người Việt Nam xấu xí".

Dốt 1 đề cập tới tính bất khả thi và sự duy lý của việc phổ cập bơi ếch cho trẻ nhỏ để phòng chống đuối nước trong tình hình hiện nay. Tiếp trong mục ***Dốt 2*** này, Lão Tao sẽ cho bạn biết, việc bạn nghĩ mình không có năng khiếu ngoại ngữ để rồi không học / ngại học ngoại ngữ là chuyện dốt nhất quả đất.

Trời không bắt ai dốt ngoại ngữ bẩm sinh
Trời đã cho con người bộ óc thông minh
Nếu bạn nghĩ bạn dốt
Thì không thể học tốt
Đánh giá thấp bản thân là mình tự hại mình.

Người xưa nói “gieo ý nghĩ… gặt số phận”, vì thế, nếu nghĩ là mình dốt ngoại ngữ thì sẽ dốt ngoại ngữ, còn nếu nghĩ không dốt ngoại ngữ thì sẽ sử dụng được ngoại ngữ. (Điều này đúng với nhiều chuyện, không chỉ riêng với ngoại ngữ.)



Trong thực tế, luôn có người có năng khiếu ngoại ngữ, có người không. Nhưng người không có năng khiếu ngoại ngữ không phải là người dốt ngoại ngữ. Nếu không nghĩ mình dốt và học đúng phương pháp, thì ai cũng có thể sử dụng ngoại ngữ bình thường.

Tiếc là số đông nghĩ mình dốt nên không muốn học, nếu phải học vì lý do nào đó thì sẽ học đối phó, không tìm ra cách học phù hợp.

Lấy việc học tiếng Anh làm ví dụ: Hiện nay, sau khoảng chục năm học tiếng Anh ở trường (phổ thông và đại học), số đông sinh viên khi ra trường vẫn có vẻ “Câm & Điếc” tiếng Anh. Tình hình không khá hơn ở các khoá học theo chứng chỉ A, B, C, D... hay các khoá học từ xa, ban đêm.

Với các bạn đã thi TOEFL, IELTS... và du học nước ngoài, tình hình có khá hơn, nhưng người Việt Nam nói chung, kể cả dân công sở có chứng chỉ TOEIC theo yêu cầu, vẫn không thật giỏi ngoại ngữ.

Ngoài giới đi học, đi làm ở những nơi cần giao dịch với người nước ngoài, tình hình ngoại ngữ của số đông dân ta là kém bét nhè. Khi đã thấp bé nhẹ cân, da vàng mũi tẹt lại còn "câm" hay "ngọng" nữa thì khi ra nước ngoài, khó có thể vỗ ngực tự hào: "Tôi là người Việt Nam".

Dốt ngoại ngữ rất thiệt. Vì chỉ biết tiếng mẹ đẻ nên bạn hầu như phải đọc và nghe từ một nguồn; khó tự tìm hiểu văn hóa, cuộc sống của các nước khác; không có cơ hội làm ăn với đối tác nước ngoài... Dốt ngoại ngữ khổ thế nào, bạn tự hiểu, Lão chả cần kể nữa.

Muốn ngoại ngữ khá lên cần tìm xem mình sai ở đâu, dốt ở đâu khi học ngoại ngữ. Là người có sử dụng ngoại ngữ, qua nhiều năm đúc rút, Lão thấy mình và nhiều người, khi học ngoại ngữ thường dốt, sai ở mấy điểm sau:

1. Nghĩ mình dốt ngoại ngữ là sẽ ngại học và rồi dốt mãi;

2. Không biết tạo môi trường để vừa sử dụng vừa học ngoại ngữ;

3. Lao đầu vào học cả nghe, nói, đọc, viết cùng lúc, rất trái tự nhiên;

4. Học các bài khóa, từ ngữ, ngữ pháp vô bổ mà có khi cả đời chẳng dùng tới (tử ngữ);

5. Nghĩ rằng, ngoại ngữ có thể học cấp tốc, giỏi cấp tốc.

Trong phần này, Lão chỉ xin bàn về chuyện nghĩ mình dốt thì sẽ dốt. Như ta biết, luôn có người giỏi ngoại ngữ, có người không. Nhưng không ai dốt ngoại ngữ bẩm sinh, vì nếu biết cách học, ai cũng có thể sử dụng ngoại ngữ bình thường.

Người ta chỉ dốt khi nghĩ mình dốt và học sai cách. Lão sẽ cho bạn thấy khi xem xét những trường hợp dưới đây:

Trường hợp 1: Bạn là người Việt, sinh ở Việt Nam, sống ở Việt Nam, tiếng Việt sẽ là tiếng mẹ đẻ của bạn, còn tiếng Anh, Pháp, Nga, Trung... sẽ là ngoại ngữ;

Trường hợp 2: Bạn là người Việt, sinh ở Mỹ (Pháp), sống ở Mỹ (Pháp). Nếu bố mẹ bạn lơ là dạy bạn tiếng Việt thì nguy cơ bạn không biết tiếng Việt là rất cao. Bạn sẽ chỉ biết tiếng Anh (Pháp) và dùng tiếng Anh (Pháp) không khác gì dân bản địa. Tiếng Việt tuy là tiếng mẹ đẻ nhưng đối với bạn nó đã trở thành ngoại ngữ như các tiếng Trung, Tây Ban Nha...

Trường hợp 3: Bạn là người Việt, sinh ở Canada, nơi sử dụng cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Nếu bố mẹ bạn chăm dạy bạn tiếng Việt, bạn sẽ có thể sử dụng tốt cùng lúc cả 3 thứ tiếng Việt, Anh, Pháp. Các thứ tiếng Tây Ban Nha, Nhật... sẽ là ngoại ngữ đối với bạn.

Trường hợp 4: Bạn là người Nga, hay Mỹ, hay châu Phi, được bố mẹ người Việt nuôi lớn từ bé ở Việt Nam, bạn sẽ nói tiếng Việt như người Việt, còn tiếng Nga, tiếng Anh, Trung… sẽ là ngoại ngữ đối với bạn.

Như vậy, con một bà nông dân ở góc quê nào đó của Việt Nam, do một lý do nào đó, được đưa sang Anh, sang Mỹ sinh sống từ bé, sẽ nói tiếng Anh búa xua như dân bản địa; một em bé châu Phi, nếu sống ở Việt Nam từ bé, sử dụng tiếng Việt từ bé, thì cũng ba la, ba la tiếng Việt như người Việt thôi, cần gì năng khiếu ngoại ngữ nhỉ?

Rõ ràng là:

> Môi trường bắt buộc sử dụng một thứ ngôn ngữ nào đó có ảnh hưởng quyết định đến khả năng sử dụng thành thạo ngôn ngữ đó chứ không phải năng khiếu ngoại ngữ.

Nói tới năng khiếu ngoại ngữ là nói tới việc dùng ngoại ngữ làm nhiều chuyện cao siêu như phiên dịch, biên dịch, dịch cabin, viết sách... đâu phải dùng ngoại ngữ để đọc, nói, nghe đài, xem tivi hay giao tiếp thông thường. Chuyện hồi nào, có anh chàng Joe người Canada mới sang Việt Nam vài năm mà có thể nói sõi tiếng Việt và còn biết nhiều từ "ma xó" kiểu "Sát thủ đầu mưng mủ" hay "Bộ đội phải chơi trội"... là trường hợp có năng khiếu ngoại ngữ đặc biệt, không cần bàn.

Sẽ có lúc Lão viết tiếp về 4 cái dốt còn lại giúp các bạn hiểu mình sai ở đâu và nên học thế nào để vừa nhanh, vừa hiệu quả. Hiện, Lão có mấy lời khuyên như sau:

- Đừng bao giờ nghĩ mình ngoại ngữ dốt;
- Hãy sử dụng ngoại ngữ ít nhất là 60' mỗi ngày cho công việc, nghề nghiệp, thú vui để học ngoại ngữ. Sử dụng và học luôn tốt hơn là học mà không sử dụng;
- Xác định mục đích học ngoại ngữ và chọn các courses, các phương pháp phù hợp;
- Học theo tuần tự tự nhiên: Nhìn (quen mặt chữ) – Nghe – Nói – Đọc – Viết. Có đứa bé nào mới sinh ra học cả 4 thứ như vậy một lúc đâu;
- Đừng chú trọng ngữ pháp. Càng học ngữ pháp càng rối. Mấy bà ở Hội An, mấy cháu người H'Mong ở Sapa có biết téo ngữ pháp nào đâu mà chém veo veo với du khách nước ngoài;
- Hãy đọc sách song ngữ để tích lũy từ vựng. Các sách song ngữ Anh Việt của Sputnik mà bạn nên có là Hoàng Tử bé, Thơ ngụ

ngôn Aesop, Phù thủy xứ OZ;

- Chăm chỉ sử dụng Google dịch;
- Chăm theo dõi tình hình quốc tế: Chính trị, kinh tế, văn hóa, nghệ thuật, thể thao… để tạo lập "Vùng thông tin chung". Nếu không có "Vùng thông tin chung", bạn có gì để giao tiếp, chia sẻ với các bạn nước ngoài? Không lẽ sau "Hi, My name is…, I am 20 years old…" là hết phim?
- …

Học chăm sai phương pháp - Đời vẫn đầy bão táp

Trong Sputnik Newsletter 5/2017 sẽ là: Dốt 3 – Chăm thể dục sẽ sống khỏe.

Học tiếng Anh cùng Cáo
(Thơ ngụ ngôn Aesop song ngữ)

Trong mục học tiếng Anh cùng sách song ngữ lần này, Sputnik Newsletter xin giới thiệu đến bạn đọc 9 câu chuyện ngụ ngôn kinh điển rất thú vị của Aesop với nhân vật chính là Cáo, được nhà văn Walter Crane viết lại thành các bài thơ theo khổ thơ limerick, từ quyển sách ***Thơ ngụ ngôn Aesop song ngữ Anh-Việt*** (Tủ sách Sputnik, Số 021). Đó là các truyện:

- Cáo và chùm nho (nho không ăn được là nho xanh)

- Cáo và Sếu (ăn miếng trả miếng)

- Cáo và đàn muỗi (khi cả hệ thống còn bị "mắc đuôi", thì đuổi quan tham vô ích như đuổi muỗi)

- Cáo và Sư tử (gần chùa gọi bụt bằng anh)

- Cáo cụt đuôi (có những cái mốt chẳng có lý do nào tốt)

- Cáo và Gà (đề phòng những "tình bạn" vụ lợi)

- Cáo và Mèo (trăm hay không bằng tay quen)

- Cáo và Quạ (nghe xu nịnh thì lụi bại)

- Cáo và mặt nạ (mặt nạ giả mạo)

Mỗi truyện thơ ngụ ngôn này vừa là một bài học về cuộc sống, đồng thời là một bài học về tiếng Anh, đi kèm giải thích khá chi tiết nghĩa của các từ tiếng Anh được dùng.

Bạn đọc muốn tiến bộ nhanh về tiếng Anh, xin mời tìm hiểu dòng sách song ngữ Anh-Việt của Sputnik Education:

http://sputnikedu.com/index.php/song-ngu/

1. The fox and the grapes

This Fox has a longing for grapes:
He jumps, but the bunch still escapes.
So he goes away sour;
And, 'tis said, to this hour
Declares that he's no taste for grapes.

THE GRAPES OF DISAPPOINTMENT ARE ALWAYS SOUR

Con cáo và chùm nho

Cáo thèm muốn nhìn chùm nho trên cao ngất
Cố nhảy lên túm mấy lần đều trượt mất
Nó bèn ngúng nguẩy bỏ đi
"Nho xanh, chua lắm, ra gì"
Đến bây giờ nó vẫn chê nho chán ngắt

NHO KHÔNG ĂN ĐƯỢC LÀ NHO XANH

Chú giải

fox: con cáo; *grapes*: những quả nho

has a longing for ...: thèm muốn ...

he jumps: nó nhảy lên

bunch: chùm (nho)

escapes → *to escape*: tẩu thoát (không bị túm)

sour: chua, chua chát; *goes away sour*: cay đắng bỏ đi

'tis said = viết tắt của *it is said*: người ta nói rằng

to this hour: cho đến bây giờ

declares → *to declare*: tuyên bố

he's no taste for ... = viết tắt của *he has no taste for ...*: nó không thích ...

disappointment: sự thất vọng

2. The Fox and the Crane

You have heard how Sir Fox treated Crane:
With soup in a plate. When again
They dined, a long bottle
Just suited Crane’s throttle:
And Sir Fox licked the outside in vain.

THERE ARE GAMES THAT TWO CAN PLAY

Cáo và Sếu

Bạn đã biết Cáo tiếp đãi Sếu ra sao
Bát canh nông, Sếu chẳng hớp được miếng nào
Rồi khi Cáo được Sếu mời cơm
Mỏ Sếu dài hợp với bình hơn
Còn Cáo liếm quanh, chẳng thể cúi miệng vào

ĂN MIẾNG TRẢ MIẾNG

Chú giải

sir: ông, ngài

treated → *to treat*: đối xử, tiếp đãi

crane: con sếu (và còn có nghĩa là cái cần cẩu, vì nó có chân dài và cổ dài giống con sếu)

plate: cái đĩa

suited → *to suit*: phù hợp với

throttle: hầu, họng

licked → *to lick*: liếm

outside: bên ngoài; *the outside*: phía bên ngoài

in vain: vô ích

there are games that two can play: có những trò mà cả hai bên có thể chơi

3. The fox and the mosquitoes

Being plagued with Mosquitoes
Said old Fox, "Pray don’t send them away,
For a hungrier swarm
Would work me more harm;
I had rather the full ones should stay."

THERE WERE POLITITIANS IN AESOP’S TIME

Con cáo và đàn muỗi

Cáo già mắc đuôi, bị đàn muỗi bủa vây
Đốt sưng người, nói “Đừng vội đuổi chúng ngay
Vì nếu có một đàn muỗi khác
Đói hơn sẽ đốt ta tan xác,
Thà cứ để bọn muỗi no rồi ở đây"

QUAN THAM NHƯ MUỖI, KHÔNG DỄ ĐUỔI

Chú giải

beging plagued with: đang bị phiền phức, bị gây tai họa bởi

mosquitoe: con muỗi

pray do hoặc *pray don’t*: xin hãy làm hoặc xin đừng làm

send them away: đuổi chúng đi

hungry: đói, *hungrier*: đói hơn

swarm: đàn (côn trùng)

work me more harm: gây cho tôi nhiều tác hại hơn

full: đầy, no, *the full ones*: ở đây là cụm từ chỉ những con muỗi đã no.

there were politicians in Aesop’s time: trong thời của Aesop cũng có những người làm chính trị (bọn quan lại, được ví như muỗi hút máu dân)

4. The fox and the lion

The first time the Fox had a sight
Of the Lion, he ’most died of fright;
When he next met his eye,
Fox felt just a bit shy;
But the next, quite at ease and polite.

FAMILARITY DESTROYS FEAR

Cáo và sư tử

Lần đầu tiên nhìn thấy Sư Tử dữ
Chú Cáo Con chết ngất đi vì sợ
Lần thứ hai đã hơi quen
Cáo ta dè dặt mon men
Lần tiếp theo, Cáo vô tư, lịch sự

GẦN CHÙA GỌI BỤT BẰNG ANH

Chú giải

had a sight → *to have a sight*: được nhìn thấy

’most = viết tắt của *almost*: gần như, suýt

died of fright → *to die of fright*: chết vì sợ

met his eye → *to meet his eye*: bắt gặp ánh mắt của nó

felt → *to feel*: cảm thấy

just a bit: chỉ một chút; *shy*: ngại ngùng, e dè

quite at ease: khá thoải mái; *polite*: lịch sự

familarity destroys fear: sự quen thuộc tiêu diệt đi nỗi sợ

5. The fox without tail

Said Fox, minus tail in a trap,
"My friends! here’s a lucky mishap;
Give your tails a short lease!"
But the foxes weren’t geese,
And none followed the fashion of trap.

YET SOME FASHIONS HAVE NO BETTER REASON

Con cáo cụt đuôi

Cáo bị cụt đuôi, nói "Các bạn có thấy
Tôi may mắn, có đuôi ngắn, rất tiện đấy,
Các bạn cũng nên để ngắn thôi!"
Nhưng loài cáo đâu phải vịt trời
Chẳng con nào theo mốt cho đuôi vào bẫy

CÓ NHỮNG CÁI MỐT CHẲNG CÓ LÝ DO NÀO TỐT

Chú giải

minus tail: trừ đi cái đuôi

in a trap: trong một cái bẫy

my friends: các bạn của tôi

lucky: may mắn

mishap: tai nạn

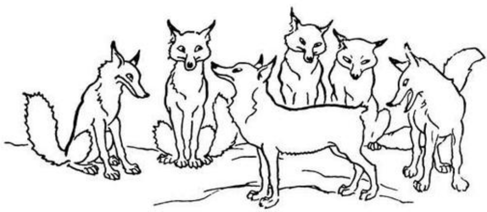
lease: sự cho thuê, cho phép; *short lease*: sự thả lỏng ít thôi

geese = số nhiều của *goose*: những con ngỗng

to follow: theo, đi theo, làm theo, theo dõi

fashion: mốt

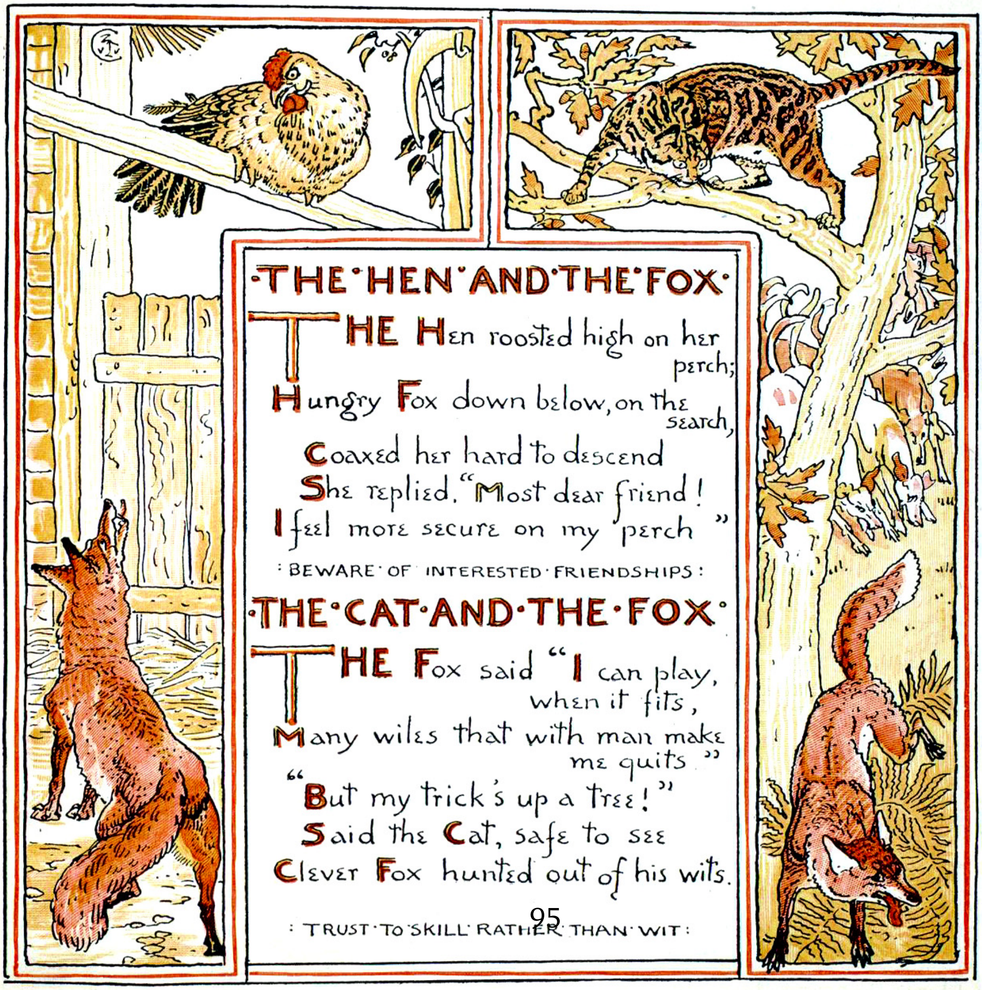
yet some fashions have no better reason: có những cái mốt chẳng có lý do nào tốt



6. The hen and the fox

The Hen roosted high on her perch;
Hungry Fox down below, on the search,
Coaxed her hard to descend
She replied, "Most dear friend!
I feel more secure on my perch."

BEWARE OF INTERESTED FRIENDSHIPS



Gà và cáo

Gà mái tơ ngủ trên chiếc sào cao
Cáo đói tìm ăn phía dưới gọi chào
Rủ rê gà xuống thăm hỏi
"Thưa bạn quý", gà mái nói,
"Tôi yên tâm hơn khi ở trên sào"

cần đề phòng những tình bạn vụ lợi

Chú giải

hen: con gà mái

roosted → *to roost*: ngủ, đậu để ngủ (gà)

hungry fox: con cáo đói

down below: ở phía dưới

on the search: đang tìm kiếm (cái ăn)

perch: cái sào, cái cành cây chĩa ra

coaxed → *to coax*: tán tỉnh, dỗ ngọt

to descend: đi xuống

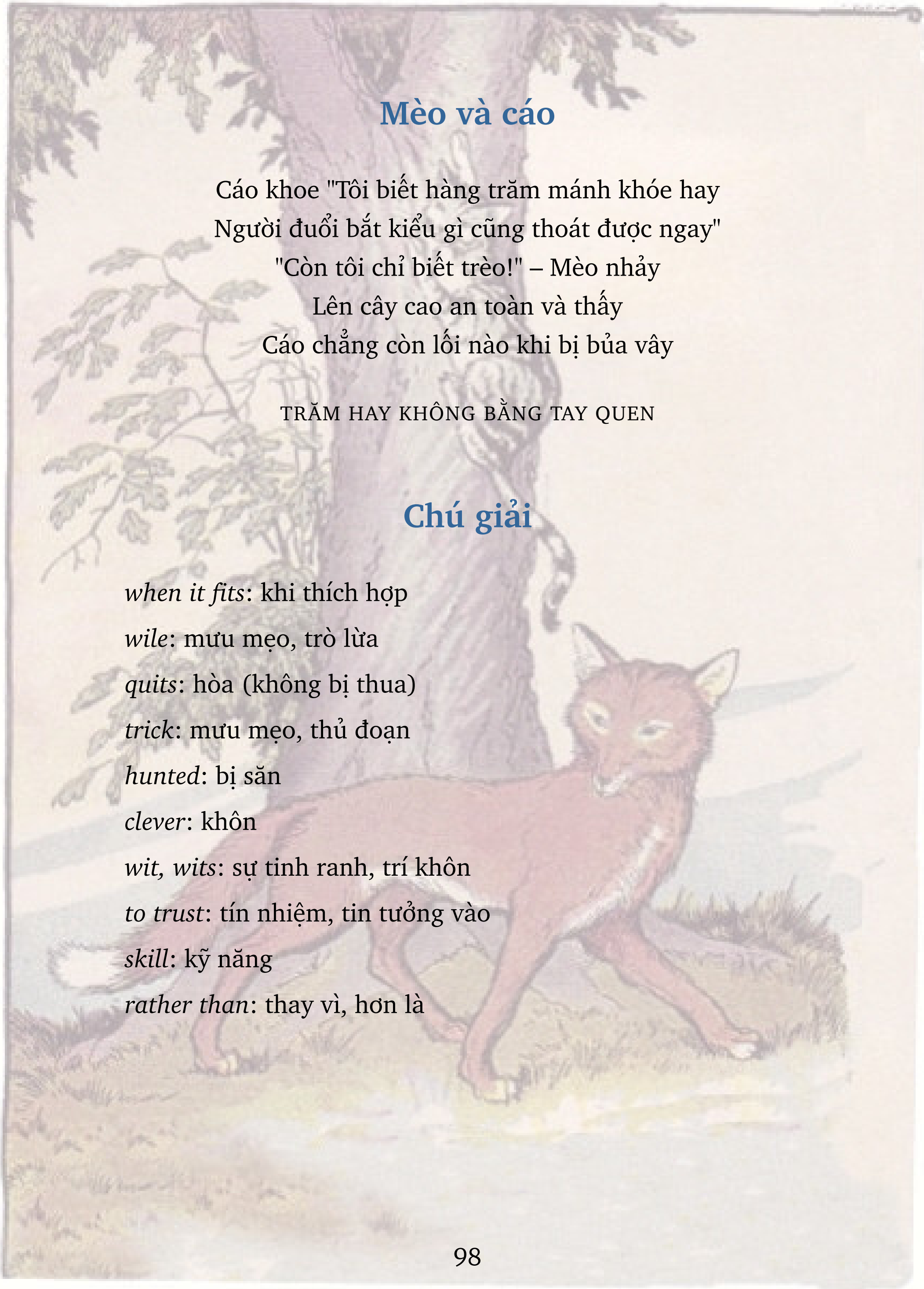
to feel more secure: cảm thấy an toàn hơn

interested friendship: tình bạn vụ lợi

7. The cat and the fox

The Fox said "I can play when it fits
Many wiles that with man make me quits."
"But my trick's up a tree!"
Said the Cat, safe to see
Clever Fox hunted out of his wits.

TRUST TO SKILL RATHER THAN WIT



Mèo và cáo

Cáo khoe "Tôi biết hàng trăm mánh khóe hay
Người đuổi bắt kiểu gì cũng thoát được ngay"
"Còn tôi chỉ biết trèo!" – Mèo nhảy
Lên cây cao an toàn và thấy
Cáo chẳng còn lối nào khi bị bủa vây

TRĂM HAY KHÔNG BẰNG TAY QUEN

Chú giải

when it fits: khi thích hợp

wile: mưu mẹo, trò lừa

quits: hòa (không bị thua)

trick: mưu mẹo, thủ đoạn

hunted: bị săn

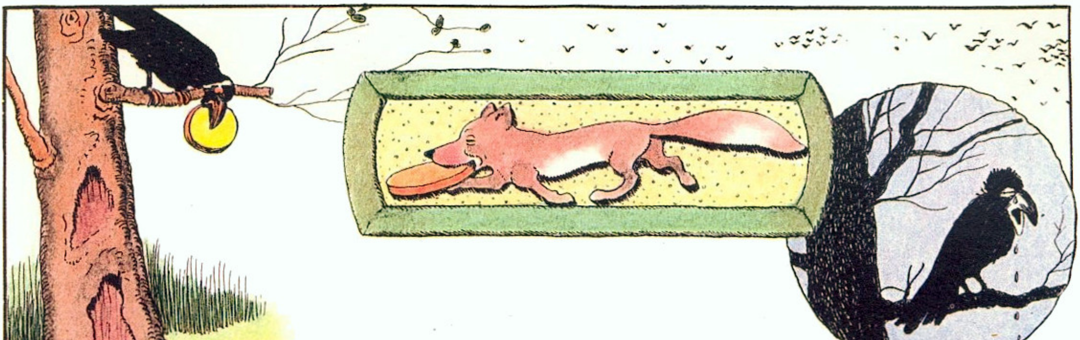
clever: khôn

wit, wits: sự tinh ranh, trí khôn

to trust: tín nhiệm, tin tưởng vào

skill: kỹ năng

rather than: thay vì, hơn là



8. The Fox and the Crow

Said sly Fox to the Crow with the cheese,
"Let me hear your sweet voice, now, do please!"
And this Crow, being weak,
Cawed the bit from her beak.
"Music charms," said the Fox, "and here's cheese."

BEWARE OF FLATTERERS

Cáo và quạ

Cáo gian tán tỉnh quạ đang ngậm phó mát
"Quạ ơi, giọng bạn tuyệt vời, xin hãy hát"
Quạ ngốc nghe lời cáo mơi
Mở miệng, phó mát tuột rơi
Cáo nói: "Nhạc hay, lại được ngay phó mát."

HÃY ĐỀ PHÒNG NHỮNG KẺ XU NỊNH

Chú giải

sly: gian giảo

cheese: phó mát (phô mai)

sweet voice: giọng ngọt ngào

being weak: là đứa yếu kém (ở đây là về tinh thần, trí tuệ)

cawed $\rightarrow$ *to caw*: kêu (như quạ)

bit: mẩu, miếng

beak: mỏ; *cawed the bit from her beak*: há miệng kêu làm tuột miếng ra khỏi mỏ

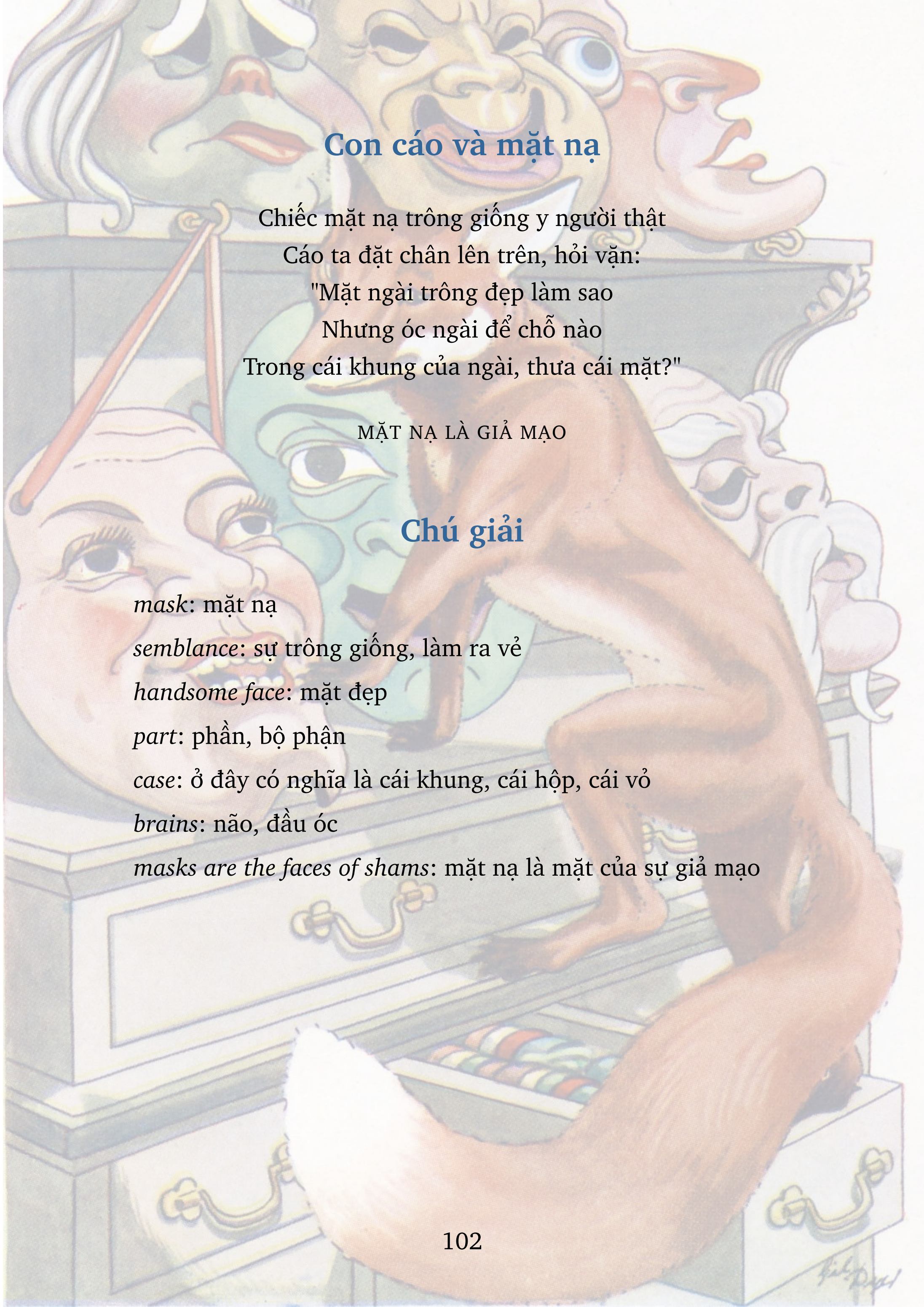
beware: hãy đề phòng

flatterer: kẻ xu nịnh

9. The fox and the mask

A Fox with his foot on a Mask,
Thus took the fair semblance to task.
"You’re a real handsome face;
But what part of your case
Are your brains in, good Sir! let me ask?"

MASKS ARE THE FACES OF SHAMS



Con cáo và mặt nạ

Chiếc mặt nạ trông giống y người thật
Cáo ta đặt chân lên trên, hỏi vặn:
"Mặt ngài trông đẹp làm sao
Nhưng óc ngài để chỗ nào
Trong cái khung của ngài, thưa cái mặt?"

MẶT NẠ LÀ GIẢ MẠO

Chú giải

mask: mặt nạ

semblance: sự trông giống, làm ra vẻ

handsome face: mặt đẹp

part: phần, bộ phận

case: ở đây có nghĩa là cái khung, cái hộp, cái vỏ

brains: não, đầu óc

masks are the faces of shams: mặt nạ là mặt của sự giả mạo

SÁCH SPUTNIK: ĐỌC LÀ THÍCH!

Tủ sách Sputnik là tuyển tập những sách hay nổi tiếng dành cho học sinh, cả về toán học lẫn ngoại ngữ, văn học, lịch sử, v.v. Dưới đây là một số ví dụ. Xem chi tiết & đặt mua tại: http://sputnikedu.com

Một số ảnh hoa đào trong Newsletter lần này là do GS. Nguyễn Tiến Dũng chụp tại Shanghai Jiao Tong University, nơi có khuôn viên rộng lớn với phong cảnh rất đẹp, vào đầu tháng 04/2017. Cây đào trong ảnh này nằm cách phòng làm việc của GS Dũng tại SJTU vài chục mét.