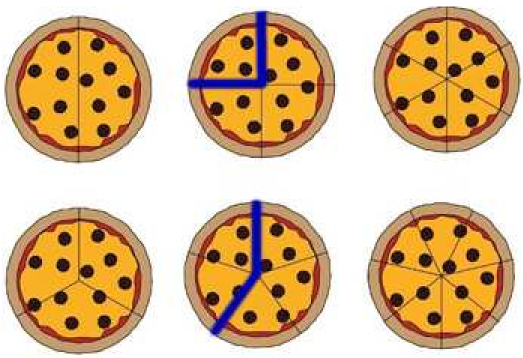
§1 Mở rộng khái niệm phân số

§1.1 Phân số dương

Ở Tiểu học, ta đã biết rằng kết quả của phép chia một số tự nhiên (ví dụ: số 2) cho một số tự nhiên khác 0 (ví dụ: 5) có thể viết dưới dạng phân số (ví dụ: $\frac{2}{5}$). Từ thời cổ đại, con người đã biết dùng những phân số như vậy trong việc chia các thứ, như là lương thực, công việc, v.v.

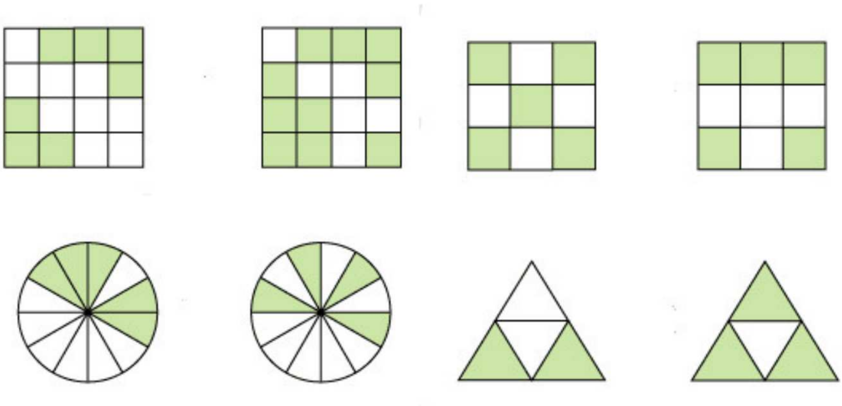


Chẳng hạn, nếu có 1 cái bánh pizza chia đều cho 4 người, thì mỗi người được một phần tư cái bánh, viết là $\frac{1}{4}$. Còn nếu có 2 cái bánh chia cho 5 người, thì mỗi người được $\frac{2}{5}$ cái bánh. Nhìn trên hình vẽ, ta có thể nhận thấy ngay rằng $\frac{2}{5}$ cái bánh thì nhiều hơn là $\frac{1}{4}$ cái bánh, tức là $\frac{2}{5} > \frac{1}{4}$.

Các phân số như là $\frac{1}{4}$ và $\frac{2}{5}$ được học từ Tiểu học có tử và mẫu đều là số nguyên dương, và được gọi là **phân số dương**.

? Viết các phân số sau: Hai phần bảy; năm phần tám; mười một phần bốn; mười bốn phần năm.

Bài tập 1.1. Phần tô màu trong các hình sau đây biểu diễn các phân số nào?



Bài tập 1.2. Biểu diễn những phân số sau bằng cách vẽ hình chữ nhật chia đều thành nhiều phần rồi tô màu một số phần: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}$.

Bài tập 1.3. Cho đoạn thẳng AB chia thành 12 khúc:

Hãy vẽ các đoạn thẳng CD, EF, GH, IK biết rằng:

$$CD = \frac{1}{2}AB; \qquad EF = \frac{2}{3}AB; \qquad GH = \frac{3}{4}AB; \qquad IK = \frac{5}{4}AB.$$

§1.2 Mở rộng khái niệm phân số

Trong toán học, ngoài phân số dương, còn có cả **phân số âm** nữa, khi mà tử số hoặc mẫu số là số nguyên âm. Nói một cách tổng quát:

> *Người ta gọi $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ là một* **phân số***, a là* **tử số** *(tử), b là* **mẫu số** *(mẫu) của phân số.*

Trong câu trên, $\mathbb{Z}$ là ký hiệu của tập hợp các số nguyên, còn viết "$a, b \in \mathbb{Z}$" có nghĩa là a và b là hai số nguyên (có thể âm).

Hiểu nghĩa của một phân số có tử hoặc mẫu là số âm như thế nào? Điều này sẽ được giải thích ở phía dưới.

Ví dụ 1.1. $\frac{-2}{3}, \frac{3}{-5}, \frac{4}{3}, \frac{-2}{-1}, \frac{0}{-4}, \ldots$ là những phân số.

? *Cho ba ví dụ về phân số. Cho biết tử và mẫu của mỗi phân số đó.*

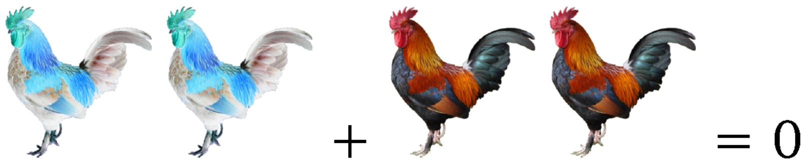
? *Dùng cả hai số 3 và 8 để viết thành phân số (mỗi số chỉ được viết một lần). Cũng hỏi như vậy đối với hai số 0 và -2.*

? *Trong các cách viết sau đây, cách viết nào cho ta phân số?*
a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{0{,}25}{-4}$; c) $\frac{-2}{5{,}1}$; d) $\frac{402}{2017}$; e) $\frac{3}{0}$.

§1.3 Phân số có tử là số âm

Ngày xưa, con người không chấp nhận số âm, coi chúng là phí lý, là không tồn tại, bởi vì làm gì có âm hai con gà hay âm ba quả táo.

Những người đầu tiên thấy sự hữu ích của số âm có lẽ là những thương gia từ thời trước công nguyên: để phân biệt những khoản có (dương) và những khoản nợ (âm), họ dùng các màu khác nhau trong sổ ghi chép. Ngày nay thì số âm đã hiện diện ở khắp các nơi, và không ai còn nghi ngờ công dụng của chúng.



Tưởng tượng "âm hai con gà" triệt tiêu "dương hai con gà".

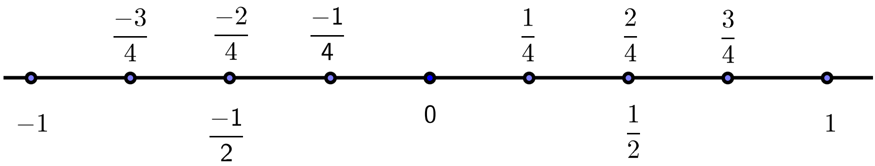
Một phân số có tử là số âm và mẫu là số dương, ví dụ $\frac{-3}{4}$, cũng là một số âm, và có thể hiểu là kết quả của phép chia -3 cho 4. Tất nhiên, về mặt vật lý, chẳng ai có thể "ăn $\frac{-3}{4}$ cái bánh". Nhưng có thể hiểu "có $\frac{-3}{4}$ cái bánh" như là "đang mắc nợ $\frac{3}{4}$ cái bánh". Còn "được $\frac{-1}{3}$ triệu đồng" có nghĩa là "mất $\frac{1}{3}$ triệu đồng".

? *Mọi số nguyên có thể viết dưới dạng phân số không? Cho ví dụ.*
Nhận xét: *Số nguyên a có thể viết là $\frac{a}{1}$.*

§1.4 Biểu diễn phân số trên trục số

Người ta hình dung một đường thẳng vẽ nằm ngang như là một trục số trên đó có thể đánh dấu các số: số 0 nằm ở giữa, các số nguyên dương xếp cách đều nhau ở phía bên phải số 0, và các số nguyên âm xếp cách đều nhau ở phía bên trái số 0.

Ta cũng có thể đánh dấu vị trí của các phân số trên trục số này. Ví dụ như, để tìm vị trí của $\frac{3}{4}$, ta chia đoạn thẳng đơn vị ra thành 4



khúc nhỏ bằng nhau (mỗi khúc có độ dài là $\frac{1}{4}$), rồi dịch chuyển từ điểm 0 sang phía bên phải 3 khúc nhỏ như vậy, được vị trí của $\frac{3}{4}$. Để tìm vị trí của $\frac{-1}{4}$ thì ta phải dịch điểm 0 sang phía bên trái một khúc nhỏ như vậy, v.v.

Chú ý rằng, có những phân số tuy viết khác nhau, nhưng chiếm cùng một vị trí trên trục số, tức là chúng biểu thị cùng một đại lượng (cùng một số). Ví dụ như $\frac{2}{4}$ và $\frac{1}{2}$ cùng nằm ở chính giữa đoạn thẳng từ 0 đến 1. Các phân số như vậy được gọi là **bằng nhau**:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Bài tập 1.4. Đánh dấu vị trí các phân số sau trên trục số và xác định xem những phân số nào bằng nhau:

$$\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}$$

§1.5 Phân số có mẫu là số âm: nguyên tắc đổi dấu

Phân số $\frac{3}{-4}$ còn "kỳ quái" hơn là phân số $\frac{-3}{4}$ nữa, bởi ta có thể chia "nợ ba cái bánh" cho bốn người, nhưng làm sao có thể chia ba cái bánh cho âm bốn người, vì lấy đâu ra "âm bốn người". Tuy nhiên, trong toán học, người ta vẫn thừa nhận phép chia cho số âm, với nguyên tắc đổi dấu như sau: $a : (-b) = (-a) : b$, còn $(-a) : (-b) = a : b$. (*Dương chia âm thành âm, âm chia âm thành dương*). Bởi vậy, đối với các phân số, ta có thể viết:

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} \quad ; \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Nguyên tắc đổi dấu phía trên cho phép chúng ta tính toán với các phân số có mẫu là số âm, và viết lại chúng dưới dạng phân số có mẫu là số dương. Ví dụ:

$$\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}; \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}; \frac{11}{-2} = \frac{-11}{2}; \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2}.$$

Bài tập 1.5. Viết các phép chia sau dưới dạng phân số:

a) $2 : (-20)$;

b) $(-1) : (-4)$;

c) $5 : (-11)$;

d) a chia cho 3 ($a \in \mathbb{Z}$).

Bài tập 1.6. Hãy viết mỗi phân số sau đây thành một phân số bằng nó và có mẫu dương: $\frac{1}{-2}, \quad \frac{-3}{-4}, \quad \frac{5}{-6}, \quad \frac{-7}{-8}$.

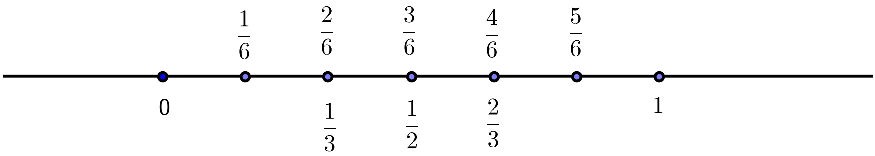
Bài tập 1.7. Hãy viết mỗi phân số sau đây thành một phân số bằng nó và có mẫu dương: $\frac{5}{-3}, \quad \frac{-11}{-13}, \quad \frac{a}{b} \quad (a, b \in \mathbb{Z}, b < 0)$.

Hu hu, em chỉ được mỗi **một** *phần hai cái bánh mà bạn Hương được những* **ba** *phần sáu cái bánh, hu hu ...*

§2 Phân số bằng nhau

§2.1 Khi nào thì hai phân số bằng nhau?

Nhắc lại rằng, **hai phân số bằng nhau** *nếu chúng biểu thị cùng một đại lượng, tức là chúng nằm ở cùng một vị trí trên trục số.*

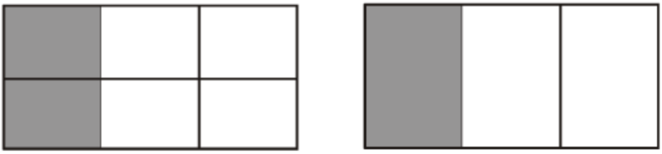


Ví dụ 1.2. Trên trục số, ta thấy hai phân số $\frac{1}{2}$ và $\frac{3}{6}$ đều nằm ở vị trí chính giữa đoạn thẳng từ 0 đến 1, nên chúng bằng nhau: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

Ví dụ 1.3. Nếu ta chia cái bánh ra làm 6 phần rồi lấy 2 phần, thì lượng bánh mà ta lấy cũng bằng như là nếu ta chỉ chia bánh ra làm 3 phần thôi rồi lấy 1 phần. Điều đó có nghĩa là các phân số $\frac{2}{6}$ và $\frac{1}{3}$ cho cùng một đại lượng như nhau, tức là chúng bằng nhau:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Nếu hai phân số có *cùng mẫu số nhưng tử số khác nhau* thì *không bằng nhau*. Chẳng hạn, trên trục số ta thấy số $\frac{4}{6}$ không nằm cùng chỗ với số $\frac{3}{6}$ mà nằm về phía bên phải của nó: vì $4 \neq 3$ nên $\frac{4}{6} \neq \frac{3}{6}$. Bốn cái bánh chia cho 6 người ăn ắt hẳn phải khác 3 cái bánh chia cho 6 người!



Hai phần sáu cái bánh bằng một phần ba cái bánh.

Giả sử ta có ba phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, và ta đã biết rằng hai phân số đầu tiên bằng nhau: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Khi đó, nếu $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ thì ta cũng có $\frac{a}{b} = \frac{e}{e}$, còn nếu $\frac{c}{d} \neq \frac{e}{f}$ thì ta cũng có $\frac{a}{b} \neq \frac{e}{f}$. Ví dụ: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ nhưng $\frac{3}{6} \neq \frac{4}{6}$ nên $\frac{1}{2} \neq \frac{4}{6}$

Bài tập 1.8. Đánh dấu vị trí các phân số sau trên trục số và xác định xem những phân số nào bằng nhau:

$$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}$$

Bài tập 1.9. Làm như bài tập trên, với các phân số sau:

$$\frac{-5}{6}, \frac{-4}{6}, \frac{-3}{6}, \frac{-2}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{0}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}$$

Tất nhiên, một **phân số dương** (nằm bên phải số 0 trên trục số) thì không thể bằng một **phân số âm** (nằm bên trái số 0 trên trục số).

Bài tập 1.10. Có thể khẳng định ngay các cặp phân số sau đây không bằng nhau, tại sao?

$$\frac{-3}{7} \text{ và } \frac{3}{7}; \quad \frac{4}{-21} \text{ và } \frac{3}{14}; \quad \frac{-5}{-10} \text{ và } \frac{5}{-10}.$$

Bài tập 1.11. Điền số thích hợp vào chỗ trống:

$$1 = \frac{\square}{3} = \frac{\square}{-5} = \frac{\square}{7} = \frac{-9}{\square} = \frac{10}{\square}$$

§2.2 Tính chất cơ bản của phân số

Ví dụ 1.4. Hình dung một lớp mẫu giáo có 20 bé và nhận được quà là 8 gói kẹo để chia đều cho nhau, mỗi bé được $\frac{8}{20}$ gói kẹo. Bây giờ hình dung là trường mẫu giáo có 7 lớp như vậy, mỗi lớp có 20 bé và nhận được 8 gói kẹo. Khi đó tổng số gói kẹo là $8 \cdot 7 = 42$, tổng số bé là $20 \cdot 7 = 140$, và số kẹo mà mỗi bé nhận được là $\frac{8 \cdot 7}{20 \cdot 7} = \frac{42}{140}$ gói, nhưng cũng là $\frac{8}{20}$ gói như trước. Bởi vậy hai phân số $\frac{8}{20}$ và $\frac{8 \cdot 7}{20 \cdot 7}$ bằng nhau:

$$\frac{8}{20} = \frac{8 \cdot 7}{20 \cdot 7} = \frac{42}{140}$$

Ta có thể thay các số $8, 20, 7$ bằng các số a, b, m bất kỳ nào đó, để được quy tắc tổng quát sau, gọi là *tính chất cơ bản của phân số*:

Nếu ta nhân cả tử và mẫu của một phân số với cùng một số nguyên khác 0 thì ta được một phân số bằng phân số đã cho:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$$

với m ***là số nguyên khác*** 0 ***bất kỳ.***

Chú ý rằng, trong ví dụ về chia kẹo cho các bé mẫu giáo thì các số a, b, m đều là số nguyên dương. Nhưng công thức $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$ vẫn đúng kể cả khi những số này có thể là số âm.

Thật vậy, bằng quy tắc đổi dấu đối với phân số, ta có thể chuyển trường hợp số âm về trường hợp số dương. Ví dụ như, thay vì nhân tử số và mẫu số với một số nguyên dương m, ta nhân chúng với số nguyên âm $-m$, thì ta có:

$$\frac{a\cdot(-m)}{b\cdot(-m)}=\frac{-(a\cdot m)}{-(b\cdot m)}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a}{b}.$$

Trong trường hợp mẫu số là một số nguyên âm $(-b)$ thì ta có:

$$\frac{a\cdot m}{(-b)\cdot m}=\frac{a\cdot m}{-(b\cdot m)}=\frac{-(a\cdot m)}{b\cdot m}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}.$$

Các trường hợp khác cũng tương tự như vậy.

Bây giờ giả sử tử số và mẫu số của phân số $\frac{A}{B}$ có chung một ước số m. Đặt $a=A:m, B=b:m$, ta có $A=a\cdot m, B=b\cdot m$, và tính chất phía trên có thể được phát biểu lại như sau:

Nếu ta chia cả tử và mẫu của một phân số cho cùng một ước chung của chúng thì ta được một phân số bằng phân số đã cho:

$$\frac{A:m}{B:m}=\frac{A}{B}$$

***với** m **là một ước số chung của** A **và** B**.*

Ví dụ 1.5. a) $\frac{3}{-4}=\frac{3\cdot 3}{(-4)\cdot 3}=\frac{9}{-12}$; b) $\frac{-15}{25}=\frac{-15:5}{25:5}=\frac{-3}{5}$

Bài tập 1.12. Giải thích vì sao: $\frac{-1}{2}=\frac{3}{-6}$; $\frac{-4}{8}=\frac{1}{-2}$; $\frac{5}{-10}=\frac{-1}{2}$.

Bài tập 1.13. Các cặp phân số sau đây có bằng nhau không?
a) $\frac{1}{4}$ và $\frac{3}{12}$; b) $\frac{2}{3}$ và $\frac{6}{8}$; c) $\frac{-3}{5}$ và $\frac{9}{-15}$; d) $\frac{4}{3}$ và $\frac{-12}{9}$.

Bài tập 1.14. Điền số thích hợp vào chỗ trống:

a) $\dfrac{\square}{7} = \dfrac{6}{21}$; b) $\dfrac{-5}{\square} = \dfrac{20}{28}$; c) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\square}{12}$;

d) $\dfrac{\square}{8} = \dfrac{-28}{32}$; e) $\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{\square}$; f) $\dfrac{3}{\square} = \dfrac{12}{-24}$.

Gợi ý: Trong các bài tập phía trên, mẫu số hoặc tử số của phân số ở vế bên phải là bội số của mẫu số hoặc tử số ở vế bên trái.

§2.3 Quy tắc bằng nhau của hai phân số

Để so sánh hai phân số $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{c}{d}$ tùy ý, đầu tiên chúng ta áp dụng tính chất cơ bản của phân số để đưa về trường hợp hai phân số có mẫu số bằng nhau:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

Bây giờ, $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{c}{d}$ bằng nhau khi và chỉ khi $\dfrac{ad}{bd}$ và $\dfrac{bc}{bd}$ bằng nhau, và vì hai phân số phía sau này có cùng mẫu số nên chúng bằng nhau khi và chỉ khi tử số của chúng cũng bằng nhau: $ad = bc$. Ta nhận được quy tắc sau cho việc kiểm tra sự bằng nhau của các phân số:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

Ví dụ 1.6. a) $\dfrac{-9}{12} = \dfrac{3}{-4}$ vì $(-9).(-4) = 36 = 12 \cdot 3$.

b) $\dfrac{4}{7} \neq \dfrac{2}{3}$ vì $4 \cdot 3 = 12 \neq 14 = 7 \cdot 2$.

Ví dụ 1.7. Tìm số nguyên x, biết $\dfrac{x}{12} = \dfrac{6}{9}$.

Giải: Vì $\frac{x}{12} = \frac{6}{9}$ nên $x \cdot 9 = 12 \cdot 6$. Suy ra $x = \frac{12 \cdot 6}{9} = 8$.

Bài tập 1.15. Từ đẳng thức $4 \cdot 15 = 6 \cdot 10$, ta có thể lập được các cặp phân số bằng nhau như sau:

$$\frac{4}{6} = \frac{10}{15}; \quad \frac{4}{10} = \frac{6}{15}; \quad \frac{15}{6} = \frac{10}{4}; \quad \frac{15}{10} = \frac{6}{4}.$$

Hãy lập các cặp phân số bằng nhau từ đẳng thức $6 \cdot 35 = 14 \cdot 15$.

Bài tập 1.16. Các số phút sau đây chiếm bao nhiêu phần của một giờ:

a) 5 phút; b) 10 phút c) 15 phút; d) 20 phút;
e) 30 phút; f) 40 phút; g) 45 phút; h) 50 phút;

Bài tập 1.17. Tìm các cặp phân số bằng nhau trong các phân số sau đây:

$$\frac{-9}{33}, \frac{15}{9}, \frac{3}{-11}, \frac{-12}{19}, \frac{5}{3}, \frac{60}{-95}.$$

Bài tập 1.18. Trong các phân số sau đây, tìm phân số không bằng phân số nào trong các phân số còn lại: $\frac{-7}{42}, \frac{12}{18}, \frac{3}{-18}, \frac{-9}{54}, \frac{-10}{-15}, \frac{14}{20}$.

Bài tập 1.19. Điền số thích hợp vào chỗ trống:

$$\frac{2}{3} = \frac{\square}{60}; \frac{3}{4} = \frac{\square}{60}; \frac{4}{5} = \frac{\square}{60}; \frac{5}{6} = \frac{\square}{60}.$$

Bài tập 1.20. Cho có hai phân số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng nếu $b \neq d$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$, còn nếu $b + d \neq 0$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Em có biết: Phân số trong xác suất?

Em đã từng chơi bài tú lơ khơ? Bộ bài có 52 quân, nếu để úp mặt thì trông giống hệt nhau. Khi lật lên hú họa một quân, thì có 52 trường hợp khác nhau có thể xảy ra với khả năng như nhau, trong đó có 13 trường hợp là quân Cơ, 4 trường hợp là quân Át, và chỉ 1 trường hợp là quân Át Cơ. Người ta nói rằng **xác suất** để có quân Cơ là $\frac{13}{52}$, bằng số trường hợp Cơ chia cho tổng số tất cả các trường hợp. Con số này cũng bằng $\frac{1}{4}$, bởi vì bộ bài chỉ có 4 chất, với khả năng hiện lên của các chất là như nhau. Tương tự như vậy, xác suất để có quân Át là $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, còn xác suất để có Át Cơ chỉ là $\frac{1}{52}$.

Nếu thay vì bộ bài, ta xét các viên xúc sắc, các đồng xu, hay các bạn trong lớp, v.v. thì xác suất để xảy ra điều gì đó cũng hay có thể viết được dưới dạng phân số, bằng số trường hợp có điều đó xảy ra chia cho tổng số trường hợp. Tuy nhiên, chú ý rằng công thức này chỉ đúng khi các trường hợp có khả năng xảy ra như nhau!

Xác suất để ngày mai em được 10 điểm môn toán là $\frac{1}{2}$, bởi vì chỉ có hai trường hợp, hoặc là được, hoặc là không! (Có thật vậy không?)

§3 Rút gọn phân số

Hu hu, phân số $\dfrac{1500}{3600}$ *của em to quá!*

Giả sử ta có một phân số "cồng kềnh", với tử số và mẫu số là những số khá lớn, ví dụ như $\frac{1500}{3600}$. Tuy nhiên, ta nhận thấy cả tử và mẫu đều chia hết cho một số nào đó, ở trong ví dụ này là số 100. Khi đó, ta có thể chia tử và mẫu cho số đó để được phân số đơn giản hơn mà vẫn bằng phân số ban đầu:

$$\frac{1500}{3600} = \frac{1500 : 100}{3600 : 100} = \frac{15}{36}.$$

Phân số $\frac{15}{36}$ tuy đã khá đơn giản, nhưng tử và mẫu đều chia hết cho 3 nên vẫn còn có thể rút gọn tiếp được: $\frac{15}{36} = \frac{15 : 3}{36 : 3} = \frac{5}{12}$. Đến đây thì ta không rút gọn thêm được nữa, vì 5 và 12 không cùng chia hết cho số nào khác 1 và -1 cả.

§3.1 Quy tắc rút gọn phân số

Muốn rút gọn một phân số, ta chia cả tử và mẫu của phân số cho một ước chung (khác 1 và -1) của chúng.

? Rút gọn các phân số sau: $\frac{-4}{8}$; $\frac{20}{-30}$; $\frac{-24}{-18}$.

▶ ***Chú ý:*** *Để để rút gọn một phân số âm, ta có thể bỏ qua dấu âm, rút gọn phân số dương trước đã, rồi đặt dấu âm sau khi rút gọn.* Ví dụ, để rút gọn $\frac{-4}{8}$, ta có thể rút gọn $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, suy ra $\frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$.

Bài tập 1.21. Một học sinh đã "rút gọn" như sau:

$$\frac{10+4}{10+8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Bạn đó giải thích: "Trước hết em rút gọn cho 10, rồi rút gọn cho 4". Hỏi bạn đó làm như vậy đúng hay sai? Vì sao?

Bài tập 1.22. Rút gọn các phân số sau:
a) $\frac{22}{55}$; b) $\frac{-63}{81}$; c) $\frac{20}{-140}$; d) $\frac{-25}{75}$.

Bài tập 1.23. Rút gọn: a) $\frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 24}$; b) $\frac{2 \cdot 14}{7 \cdot 8}$;
c) $\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{22 \cdot 9}$; d) $\frac{8 \cdot 5 - 8 \cdot 2}{16}$; e) $\frac{11 \cdot 4 - 11}{2 - 13}$.

§3.2 Phân số tối giản

Hai số nguyên a và b được gọi là **nguyên tố cùng nhau** nếu chúng không có ước chung nào ngoài 1 và -1, hay nói cách khác, ước chung lớn nhất của chúng bằng 1: ƯCLN$(a, b) = 1$. Khi đó phân số $\frac{a}{b}$ không thể rút gọn được thêm (trừ việc đổi dấu $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ nếu b là số âm), và được gọi là **phân số tối giản**:

> **Phân số tối giản** *là phân số có tử và mẫu nguyên tố cùng nhau.*

Ví dụ 1.8. Các phân số $\frac{2}{3}, \frac{-4}{7}, \frac{16}{25}$ là tối giản.

? *Tìm các phân số tối giản trong các phân số sau:* $\frac{5}{9}, \frac{-1}{4}, \frac{-4}{14}, \frac{9}{16}$.

Bài tập 1.24. Đổi ra mét vuông (viết dưới dạng phân số tối giản):

$$50\ dm^2, \quad 76\ dm^2, \quad 350\ cm^2, \quad 256\ cm^2.$$

Bài tập 1.25. Viết các số đo thời gian sau đây bằng phân số tối giản, với đơn vị là giờ: a) 20 phút; b) 35 phút; c) 90 phút.

Bài tập 1.26. Bộ răng đầy đủ của một người trưởng thành có 32 chiếc, trong đó có 8 răng cửa, 4 răng nanh, 8 răng cối nhỏ và 12 răng hàm. Hỏi mỗi loại răng chiếm mấy phần của tổng số răng? (Viết dưới dạng phân số tối giản).

Bài tập 1.27. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì không tồn tại phân số $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ sao cho $0 < d < |b|$. (Gợi ý: dùng Bài tập 1.20).

▶ ***Chú ý:*** *Khi rút gọn một phân số, ta thường rút gọn phân số đó đến tối giản.*

§3.3 Rút gọn theo ước chung lớn nhất

Ở ví dụ rút gọn phân số $\frac{1500}{3600}$ ta đã làm thành hai bước: bước đầu tiên rút gọn nó thành $\frac{15}{36}$, rồi bước tiếp theo rút gọn nó thành $\frac{5}{12}$. Thay vì làm hai hay nhiều bước, ta có thể rút gọn ngay lập tức từ $\frac{1500}{3600}$ thành $\frac{5}{12}$ chỉ trong một bước cũng được. Để làm như vậy, ta cần tìm ước số chung lớn nhất (ƯCLN) của tử số và mẫu số. Trong ví dụ này thì ƯCLN$(1500, 3600) = 300$, và

$$\frac{1500}{3600} = \frac{1500 : 300}{3600 : 300} = \frac{5}{12}$$

Quy tắc chung là:

Phân số $\frac{a : \text{ƯCLN}(a,b)}{b : \text{ƯCLN}(a,b)}$ là phân số rút gọn tối giản của $\frac{a}{b}$.

Quy tắc trên cho phép chuyển vấn đề rút gọn phân số về vấn đề tìm ước chung lớn nhất của tử số và mẫu số. Khi ta có hai số nguyên khác 0 bất kỳ (mà chưa được phân tích ra thành tích của các thừa số), thì thuật toán đơn giản nhất để tìm ước chung lớn nhất của chúng là **thuật toán Euclid**, dựa trên nguyên tắc sau: ƯCLN$(a, b) =$ ƯCLN(b, r) trong đó r là số dư của phép chia có dư của a cho b.

Ví dụ 1.9. ƯCLN$(51, 136) =$ ƯCLN$(51, 136 - 2 \cdot 51) =$ ƯCLN$(51, 34) =$ ƯCLN$(34, 51 - 1 \cdot 34) =$ ƯCLN$(34, 17) =$ ƯCLN$(17, 34 - 2 \cdot 17) =$ ƯCLN$(17, 0) = 17$. Suy ra phân số rút gọn tối giản của $\frac{51}{136}$ là: $\frac{51 : 17}{136 : 17} = \frac{3}{8}$.

Bài tập 1.28. Rút gọn các phân số sau bằng cách tìm ước chung lớn nhất của tử và mẫu: $\frac{24}{70}$; $\frac{100}{36}$; $\frac{57}{209}$.

Bài tập 1.29. Tìm các số nguyên a và b, biết: $\frac{6}{a} = \frac{b}{70} = \frac{-72}{168}$.

Bài tập 1.30. Viết tất cả các phân số bằng $\frac{21}{39}$ mà tử và mẫu là các số tự nhiên có hai chữ số.

§4 Quy đồng mẫu số

Ở §2 ta đã thấy, để xác định xem hai phân số có bằng nhau hay không ta có thể **quy đồng mẫu số** của chúng, tức là viết lại chúng dưới dạng các phân số có cùng mẫu số (và giá trị giữ nguyên như trước). Ví dụ ta muốn biết $\frac{3}{5}$ và $\frac{4}{7}$ có bằng nhau hay không. Quy đồng mẫu số, ta được $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ và $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$. Vì $21 \neq 20$ nên $\frac{21}{35} \neq \frac{20}{35}$, tức là $\frac{3}{5} \neq \frac{4}{7}$

Việc quy đồng mẫu số có ích không những cho việc xét xem các phân số có bằng nhau hay không, mà còn để xem phân số nào lớn hay hay nhỏ hơn phân số nào, và làm các phép toán cộng trừ với phân số. (Trong ví dụ trên, vì $21 > 20$ nên $\frac{21}{35} > \frac{20}{35}$, tức là $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$).

Trong § này, chúng ta học một số cách quy đồng mẫu số.

§4.1 Nhân các mẫu số với nhau

Cách dễ thấy nhất để quy đồng mẫu số là nhân các mẫu số với nhau (và nhân các tử số với những số tương ứng thích hợp).

Ví dụ 1.10. Quy đồng mẫu số các phân số $\frac{3}{5}, \frac{2}{6}, \frac{1}{4}$.

Ta có $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$, nên có thể quy đồng các mẫu số thành 120:
$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{72}{120}$; $\frac{2}{6} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{40}{120}$; $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{30}{120}$

Bài tập 1.31. Quy đồng mẫu các phân số:

a) $\frac{3}{8}$ và $\frac{9}{28}$; b) $\frac{-2}{9}$ và $\frac{3}{25}$; c) $\frac{1}{10}$ và -6;

d) $\frac{3}{130}$ và $\frac{7}{40}$; e) $\frac{4}{39}$ và $\frac{5}{13}$; f) $\frac{11}{3}$, $\frac{3}{4}$ và $\frac{-5}{6}$.

Bài tập 1.32. Quy đồng mẫu các phân số:

a) $\frac{-7}{8}, \frac{5}{6}, \frac{-15}{9}$; b) $3, \frac{-6}{10}, \frac{-2}{4}$; c) $\frac{-5}{18}, \frac{-13}{15}, -2$.

§4.2 Bội số chung và thừa số phụ

> ***Muốn quy đồng mẫu hai hay nhiều phân số, ta làm như sau:***
> ***Bước 0: Đổi dấu của tử và mẫu nếu cần để các mẫu dều dương.***
> ***Bước 1: Tìm một bội chung của các mẫu để làm mẫu chung.***
> ***Bước 2: Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu).***
> ***Bước 3: Nhân tử và mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng.***

Trong quy tắc trên, ta không nhất thiết phải nhân các mẫu với nhau như trong §4.1, mà chỉ cần tìm một bội số chung của chúng.

Ví dụ 1.11. Quy đồng mẫu số các phân số $\frac{4}{5}, \frac{-3}{-25}, \frac{-3}{2}, \frac{7}{-10}$

- Dùng nguyên tắc đổi dấu để chuyển các mẫu số âm thành mẫu số dương cho dễ nhìn, ta được: $\frac{4}{5}, \frac{3}{25}, \frac{-3}{2}, \frac{-7}{10}$.

- Tìm một bội số chung đơn giản nào đó của các mẫu số. Ví dụ, thay vì lấy tích $5 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 10 = 2500$, ta có thể chọn số 100, cũng là bội số chung của $5, 25, 2, 10$.

- Chia bội số chung này cho từng mẫu số, để được các số gọi là **thừa số phụ** tương ứng: $100 : 5 = 20$, $100 : 25 = 4$, $100 : 2 = 50$, $100 : 10 = 10$.

- Nhân tử số và mâu số của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng. (Kết quả của phép nhân mẫu số với thừa số phụ luôn là bội số chung mà ta chọn):

a) $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{80}{100}$;   b) $\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100}$;

c) $\frac{-3}{2} = \frac{(-3) \cdot 50}{2 \cdot 50} = \frac{-150}{100}$;   d) $\frac{-7}{10} = \frac{(-7) \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{-70}{100}$.

Trong trường hợp mà các phân số chưa tối giản, ta có thể rút gọn chúng trước khi quy đồng mẫu số.

Bài tập 1.33. a) Quy đồng mẫu các phân số sau: $\frac{-3}{16}, \frac{5}{24}, \frac{-21}{56}$.

b) Trong các phân số đã cho, phân số nào chưa tối giản? Từ nhận xét đó, ta có thể quy đồng mẫu các phân số này như thế nào?

Bài tập 1.34. Rút gọn rồi quy đồng mẫu các phân số:

a) $\frac{-15}{90}, \frac{120}{600}, \frac{-75}{150}$;   b) $\frac{54}{-90}, \frac{-180}{288}, \frac{60}{-135}$.

§4.3 Bội số chung nhỏ nhất

Trong quy tắc quy đồng mẫu số ở §4.2, ta được phép chọn một bội số chung tùy ý của các mẫu. Ví dụ, nếu các mẫu số là $5, 25, 2, 10$, thì chúng có các bội số chung là $50, 100, 150, 200, \ldots$. Trong số các bội số chung đó, có một số nhỏ nhất, gọi là **bội chung nhỏ nhất** (BCNN):

$$\mathrm{BCNN}(5, 25, 2, 10) = 50$$

Ta có thể dùng BCNN của các mẫu làm mẫu số chung cho việc quy đồng phân số. Trong Ví dụ 1.11 thì ta sẽ được các phân số sau, với mẫu là 50 thay vì 100:

$$\frac{40}{50}, \frac{6}{50}, \frac{-75}{50}, \frac{-35}{50}$$

? a) Tìm BCNN của các số 2, 5, 3, 8.

b) Tìm các phân số lần lượt bằng $\frac{1}{2}, \frac{-3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{-5}{8}$ nhưng cùng có mẫu là BCNN$(2, 5, 3, 8)$.

Để tìm BCNN, ta có thể phân tích các số ra thừa số nguyên tố. (Hoặc ta có thể dùng công thức BCNN$(a, b) = a \cdot b :$ ƯCLN(a, b)).

Ví dụ 1.12. Quy đồng mẫu số $\frac{5}{12}$ và $\frac{7}{30}$, sử dụng BCNN của các mẫu.

- Phân tích các mẫu ra thừa số nguyên tố: $12 = 2^2 \cdot 3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

- Tính BCNN: BCNN$(12, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

- Tìm thừa số phụ: $60 : 12 = 5\ ,\ 60 : 30 = 2$.

- Nhân tử và mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng:

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}\ ,\ \frac{7}{30} = \frac{7 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{14}{60}$$

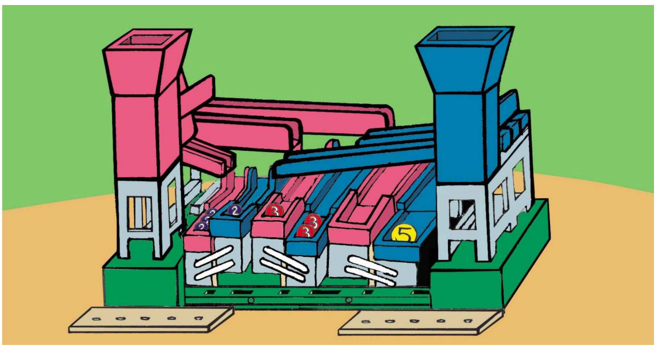
Bài tập 1.35. Tìm BCNN của các mẫu và quy đồng mẫu các phân số:

a) $\frac{-3}{44}, \frac{-11}{18}, \frac{5}{-36}$.

b) $\frac{-3}{20}, \frac{8}{9}, \frac{-10}{21}$;

c) $\frac{5}{2^2 \cdot 3}, \frac{7}{2^3 \cdot 11}$.

d) $\frac{-6}{35}, \frac{27}{-180}, \frac{-3}{-28}$.



Máy chế ƯCLN-BCNN. Tranh từ sách "*Một ngày phiêu lưu trong thế giới toán học*" của Akiyama và Ruiz.

Đố vui: nhà toán học nào?

Cho các dãy phân số sau:

C. $\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \ldots$ D. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots$ E. $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \ldots$

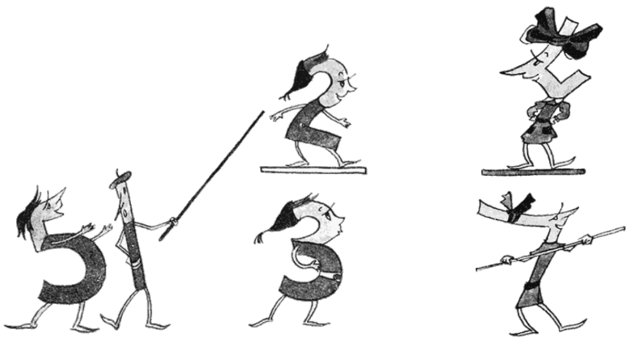
I. $\frac{2}{9}, \frac{5}{18}, \frac{1}{3}, \ldots$ L. $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{8}{18}, \ldots$ U. $\frac{8}{9}, \frac{14}{18}, \frac{2}{3}, \ldots$

Hãy quy đồng mẫu các phân số của từng dãy rồi đoán nhận phân số thứ tư của dãy đó; viết nó dưới dạng tối giản rồi viết chữ cái ở dãy đó vào ô tương ứng với phân số ấy ở hình dưới. Viết xong, em sẽ có được tên một nhà toán học nổi tiếng, người được mệnh danh là “ông tổ của hình học”.

$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{11}{12}$

Chẳng hạn, ở dãy đầu có ghi chữ C, quy đồng mẫu ta được $\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$ nên phân số thứ tư là $\frac{5}{10}$. Nó có dạng tối giản $\frac{1}{2}$, do đó ta điền chữ C vào ô ứng với số $\frac{1}{2}$ trên hình.

§5 So sánh phân số



Phân số nào lớn hơn? Tranh từ truyện toán "*Ba ngày ở nước Tí Hon*".

§5.1 So sánh hai phân số cùng mẫu

Ta đã biết so sánh hai phân số cùng mẫu với cả tử và mẫu đều dương: *phân số nào có tử nhỏ hơn thì phân số đó nhỏ hơn; phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn*. Chẳng hạn $\frac{2}{6} < \frac{3}{6}$ và $\frac{7}{10} > \frac{5}{10}$. Điều này cũng đúng khi tử số có thể là số âm:

> ***Trong hai phân số có cùng một mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.***

Ví dụ 1.13. $\frac{-3}{4} < \frac{0}{4} = 0 < \frac{1}{4} < \frac{3}{4}$ bởi vì $-3 < 0 < 1 < 3$;

$1 = \frac{5}{5} > \frac{2}{5} > \frac{-1}{5} > \frac{-4}{5}$ bởi vì $5 > 2 > -1 > -4$.

Bài tập 1.36. Điền dấu thích hợp ($<, >$) vào chỗ trống:

$$\frac{-8}{9} \square \frac{-7}{9}; \quad \frac{-1}{3} \square \frac{-2}{3}; \quad \frac{3}{7} \square \frac{-6}{7}; \quad \frac{-3}{11} \square \frac{0}{11}.$$

▶ ***Chú ý:*** *Đối với các phân số có cùng một mẫu số âm thì phải làm ngược lại!*

Ví dụ 1.14. $7 > 5$ nhưng $\dfrac{7}{-2} < \dfrac{5}{-2}$ bởi vì $\dfrac{7}{-2} = \dfrac{-7}{2}$, $\dfrac{5}{-2} = \dfrac{-5}{2}$ và $-7 < -5$.

Trong hai phân số có cùng một mẫu âm, phân số nào có tử lớn hơn thì nhỏ hơn.

Quy tắc "phản trực giác" trên về việc so sánh các phân số có cùng một mẫu số âm khiến nhiều người băn khoăn. Nhưng ta cần nhớ rằng "âm" là ngược lại của "dương" nên trong "thế giới âm" thứ tự cũng bị đảo lộn theo.

Bài tập 1.37. Xếp các phân số sau đây theo thứ tự tằng dần, từ nhỏ nhất đến lớn nhất: $\dfrac{5}{13}, \dfrac{-7}{-13}, \dfrac{2}{-13}, \dfrac{10}{13}, \dfrac{-5}{13}, \dfrac{3}{-13}, \dfrac{6}{-13}$.

Bài tập 1.38. Điền số thích hợp vào chỗ trống:

$$\frac{-11}{15} < \frac{\square}{15} < \frac{\square}{15} < \frac{\square}{15} < \frac{\square}{15} < \frac{-6}{15}.$$

$$\frac{7}{-12} < \frac{\square}{-12} < \frac{\square}{-12} < \frac{\square}{-12} < \frac{\square}{-12} < \frac{2}{-12}.$$

§5.2 So sánh hai phân số không cùng mẫu

Ví dụ 1.15. So sánh hai phân số $\dfrac{-4}{5}$ và $\dfrac{5}{-6}$.

Để so sánh hai phân số trên, ta đổi dấu tử và mẫu của phân số thứ hai thành $\dfrac{-5}{6}$ cho có mẫu số dương, rồi quy đồng mẫu số của hai phân số thành $5 \cdot 6 = 30$: $\dfrac{-4}{5} = \dfrac{-24}{30}$, $\dfrac{-5}{6} = \dfrac{-25}{30}$.

Vì $-24 > -25$ nên $\dfrac{-24}{30} > \dfrac{-25}{30}$, tức là $\dfrac{-4}{5} > \dfrac{5}{-6}$.

Muốn so sánh hai phân số không cùng mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số có cùng một mẫu dương rồi so sánh các tử với nhau: Phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

Nhận xét:

• Phân số có tử và mẫu là hai số nguyên *cùng dấu* thì *lớn hơn* 0 (**phân số dương**).

• Phân số có tử và mẫu là hai số nguyên *khác dấu* thì *nhỏ hơn* 0 (**phân số âm**).

Bài tập 1.39. So sánh các phân số sau:
a) $\dfrac{-11}{12}$ và $\dfrac{17}{-18}$; b) $\dfrac{-14}{21}$ và $\dfrac{-60}{-72}$.

Bài tập 1.40. So sánh các phân số sau với nhau và với 0:
$\dfrac{3}{5}, \dfrac{-2}{-3}, \dfrac{-3}{5}, \dfrac{2}{-7}$.

Bài tập 1.41. Lưới nào sẫm nhất?

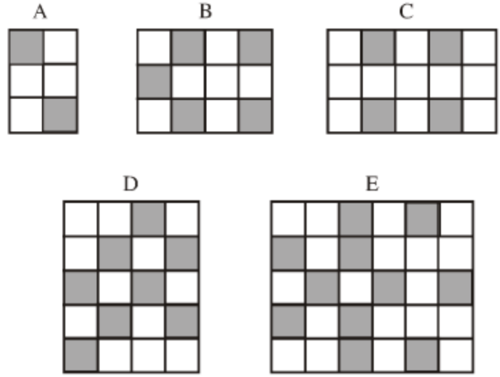
a) Đối với mỗi lưới ô vuông ở hình phía trên, hãy lập mốt phân số có tử là số ô đen, mẫu là tổng số ô đen và trắng.

b) Sắp xếp các phân số này theo thứ tự tăng dần và cho biết lưới nào sẫm nhất (có tỉ số ô đen so với tổng số ô là lớn nhất).

Bài tập 1.42. a) Đoạn nào dài hơn: $\dfrac{7}{10}$m hay $\dfrac{3}{4}$m?

b) Thời gian nào ngắn hơn: $\dfrac{3}{4}$h hay $\dfrac{4}{5}$h?

c) Khối lượng nào nhỏ hơn: $\dfrac{7}{8}$kg hay $\dfrac{3}{4}$kg?



d) Vận tốc nào lớn hơn: $\frac{4}{5}$ km/h hay $\frac{7}{9}$ km/h?

§5.3 Tính chất bắc cầu

Quan hệ "lớn hơn" và "nhỏ hơn" đối với các số (dù là số nguyên hay phân số) trên trục số có **tính chất bắc cầu** sau đây: Nếu $x > y$ và $y > z$ thì $x > y$, còn nếu $x < y$ và $y < z$ thì $x < z$. Ta có thể dùng tính chất bắc cầu này để so sánh các phân số.

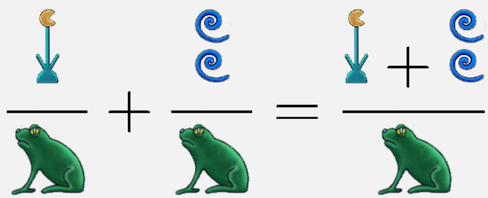
Ví dụ 1.16. Vì $\frac{4}{5} < \frac{5}{5} = 1$ và $1 = \frac{7}{7} < \frac{8}{7}$ nên theo tính chất bắc cầu ta có $\frac{4}{5} < \frac{8}{7}$.

Bài tập 1.43. Sử dụng tính chất bắc cầu, hãy so sánh các phân số sau đây:

a) $\frac{6}{7}$ và $\frac{11}{10}$; b) $\frac{-5}{17}$ và $\frac{2}{7}$; c) $\frac{419}{-723}$ và $\frac{-697}{-313}$.

§6 Phép cộng phân số

Hình vẽ này thể hiện quy tắc gì?



§6.1 Cộng hai phân số cùng mẫu

Ví dụ 1.17. Có 3 cánh bánh dẻo chia đều cho 4 người ăn. Rồi họ lại chia đều nhau ăn thêm 2 cái bánh dẻo nữa. Hỏi mỗi người ăn từng nào bánh dẻo?

Để giải bài toán trên, ta phải làm phép tính cộng. Ta có thể cộng số bánh dẻo vào với nhau rồi chia cho 4 người, được kết quả là: $\dfrac{3+2}{4} = \dfrac{5}{4}$ cái bánh cho mỗi người. Ta cũng có thể lấy lượng bánh dẻo mà mỗi người ăn đợt trước cộng với lượng bánh dẻo mà mỗi người ăn đợt sau, được $\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{4}$ cái bánh. Hai cách tính khác nhau đó tất nhiên phải cho ra cùng một kết quả, tức là ta có

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3+2}{4}.$$

Đó chính là quy tắc cộng phân số đã được học ở Tiểu học:

Muốn cộng hai phân số cùng mẫu, ta cộng các tử và giữ nguyên mẫu:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$$

Công thức trên đúng với mọi phân số, kể cả phân số âm.

Ví dụ 1.18. Ba người bạn cùng nhau đi hái táo, dự kiến sẽ hái được tổng cộng 100 kg táo. Nhưng do thời tiết xấu nên nghỉ sớm, số táo hái được chênh so với dự kiến là -20 kg. Hỏi mỗi người trung bình hái được bao nhiêu kg táo?

Để giải bài toán này, ta có thể cộng số táo dự kiến với số lượng chênh lệch để ra số lượng thực tế theo đơn vị kg $(100 + (-20) = 80)$ rồi chia cho số người, được $\frac{80}{3}$ kg mỗi người. Ta cũng có thể cộng số lượng trung bình dự kiến cho một người với số lượng chênh lệch trung bình cho một người, được $\frac{100}{3} + \frac{-20}{3}$ kg. Hai cách tính khác nhau này phải cho cùng một kết quả, tức là ta có đẳng thức $\frac{100}{3} + \frac{-20}{3} = \frac{100 + (-20)}{3}$.

Kể cả khi mẫu số là số âm thì công thức vẫn đúng. Chẳng hạn, các cách tính khác nhau $\frac{3}{9} + \frac{5}{-9} = \frac{3}{9} + \frac{-5}{9} = \frac{3 + (-5)}{9} = \frac{-2}{9}$ và $\frac{3}{9} + \frac{5}{-9} = \frac{-3}{-9} + \frac{5}{-9} = \frac{(-3) + 5}{-9} = \frac{2}{-9} = \frac{-2}{9}$ cho cùng kết quả.

? Cộng các phân số sau:

a) $\frac{3}{10} + \frac{7}{10}$; b) $\frac{1}{9} + \frac{-5}{9}$; c) $\frac{5}{18} + \frac{-13}{18}$.

? Tại sao ta có thể nói: Cộng hai số nguyên là trường hợp riêng của cộng hai phân số? Cho ví dụ.

§6.2 Cộng hai phân số không cùng mẫu

Ví dụ 1.19. Bạn chuột Jerry ăn $\frac{1}{2}$ bánh pizza, rồi lại ăn thêm $\frac{1}{5}$ bánh pizza nữa? Hỏi Jerry ăn tổng cộng bao nhiêu bánh pizza?

Câu trả lời là $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}$ bánh pizza.

Muốn cộng hai phân số không cùng mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số có cùng một mẫu rồi cộng các tử và giữ nguyên mẫu chung.

? Cộng các phân số sau:

a) $\frac{-2}{3}+\frac{4}{15}$; b) $\frac{11}{15}+\frac{9}{-10}$; c) $\frac{1}{-7}+3$.

Bài tập 1.44. Cộng các phân số (rút gọn kết quả nếu có thể):

a) $\frac{7}{-25}+\frac{-8}{25}$; b) $\frac{1}{6}+\frac{-5}{6}$;

c) $\frac{6}{13}+\frac{-14}{39}$; d) $\frac{4}{5}+\frac{4}{-18}$.

Bài tập 1.45. Tính các tổng dưới đây sau khi đã rút gọn phân số:

a) $\frac{7}{21}+\frac{9}{-36}$; b) $\frac{-12}{18}+\frac{-21}{35}$;

c) $\frac{-3}{21}+\frac{6}{42}$; d) $\frac{-18}{24}+\frac{15}{-21}$.

Bài tập 1.46. Điền dấu thích hợp ($<, >, =$) vào chỗ trống:

a) $\frac{-4}{7}+\frac{3}{-7}\ \square\ -1$; b) $\frac{-15}{22}+\frac{-3}{22}\ \square\ \frac{-8}{11}$;

c) $\frac{3}{5}\ \square\ \frac{2}{3}+\frac{-1}{5}$; d) $\frac{1}{6}+\frac{-3}{4}\ \square\ \frac{1}{14}+\frac{-4}{7}$.

Bài tập 1.47. Tìm x, biết $\dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{-7}{15}$.

Bài tập 1.48. Điền số thích hợp vào ô trống. Chú ý rút gọn kết quả (nếu có thể):

$+$	$\dfrac{-1}{2}$	$\dfrac{5}{9}$	$\dfrac{1}{36}$	$\dfrac{-11}{18}$
$\dfrac{-1}{2}$	-1			
$\dfrac{5}{9}$				
$\dfrac{1}{36}$				
$\dfrac{-11}{18}$				

Bài tập 1.49. Trong vở bài tập của bạn An có bài làm sau:

a) $\dfrac{-3}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$;

b) $\dfrac{-10}{13} + \dfrac{-2}{13} = \dfrac{-12}{13}$;

c) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{-1}{6} = \dfrac{4}{6} + \dfrac{-1}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$;

d) $\dfrac{-2}{3} + \dfrac{2}{-5} = \dfrac{-2}{3} + \dfrac{-2}{5} = \dfrac{-10}{15} + \dfrac{-6}{15} = \dfrac{-4}{15}$.

Hãy kiểm tra lại các đáp số và sửa lại chỗ sai (nếu có).

Bài tập 1.50. Các công thức sau đây có đúng với mọi phân số không? Nếu đúng thì giải thích tại sao. Nếu không thì chỉ ra phản ví dụ:

1) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$; 2) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$; 3) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{bd}$

§7 Tính chất của phép cộng phân số

> ***Khi cộng nhiều phân số ta có thể đổi chỗ hoặc nhóm các phân số lại theo bất cứ cách nào ta muốn***

§7.1 Các tính chất

Tương tự như phép cộng số nguyên, phép cộng phân số có các tính chất cơ bản sau:

- **Tính chất giao hoán**: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{c}{d} + \dfrac{a}{b}$.
- **Tính chất kết hợp**: $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}\right) + \dfrac{p}{q} = \dfrac{a}{b} + \left(\dfrac{c}{d} + \dfrac{p}{q}\right)$.
- **Cộng với số** 0: $\dfrac{a}{b} + 0 = 0 + \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b}$.

Ví dụ 1.20. $\dfrac{2}{11} + \dfrac{5}{11} = \dfrac{2+5}{11} = \dfrac{7}{11}$. Nếu viết các số hạng của tổng theo thứ tự ngược lại, ta cũng có $\dfrac{5}{11} + \dfrac{2}{11} = \dfrac{5+2}{11} = \dfrac{7}{11}$.

Ví dụ 1.21. $(\dfrac{2}{13} + \dfrac{7}{13}) + \dfrac{-4}{13} = \dfrac{9}{13} + \dfrac{-4}{13} = \dfrac{5}{13}$. Tính theo thứ tự khác, ta cũng có $\dfrac{2}{13} + (\dfrac{7}{13} + \dfrac{-4}{13}) = \dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13} = \dfrac{5}{13}$.

§7.2 Áp dụng

Vì tính chất kết hợp nên ta không nhất thiết phải viết dấu ngoặc trong một tổng của nhiều phân số. Tuy nhiên, việc sắp xếp lại các số hạng trong một tổng rồi đặt các dấu ngoặc ở chỗ thích hợp có thể giúp chúng ta đơn giản hóa việc tính toán.

Ví dụ 1.22. Tính tổng: $A = \frac{-3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{-2}{5} + \frac{6}{11} + \frac{4}{7}$.

Giải. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{-3}{5} + \frac{-2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{6}{11} \quad \text{(tính chất giao hoán)} \\ &= \left(\frac{-3}{5} + \frac{-2}{5}\right) + \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right) + \frac{6}{11} \quad \text{(tính chất kết hợp)} \\ &= (-1) + 1 + \frac{6}{11} \\ &= 0 + \frac{6}{11} \\ &= \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

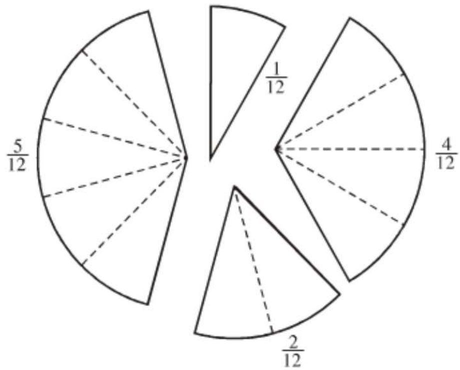
Bài tập 1.51. Tính nhanh giá trị của các biểu thức sau:
a) $\frac{-5}{11} + \left(\frac{-6}{11} + 1\right)$; b) $\frac{2}{3} + \left(\frac{5}{7} + \frac{-2}{3}\right)$; c) $\left(\frac{-1}{4} + \frac{5}{8}\right) + \frac{-3}{8}$.

Bài tập 1.52. Tính nhanh giá trị của các biểu thức sau:
a) $A = \frac{-3}{7} + \frac{5}{13} + \frac{-4}{7}$; b) $B = \frac{-2}{17} + \frac{15}{23} + \frac{-15}{17} + \frac{4}{19} + \frac{8}{23}$;
c) $C = \frac{-5}{21} + \frac{-2}{21} + \frac{8}{24}$; d) $D = \frac{-1}{2} + \frac{3}{21} + \frac{-2}{6} + \frac{-5}{30}$.

Bài tập 1.53. Tìm năm cách chọn ba trong bảy số sau đây để khi cộng lại được tổng là 0:

$$\frac{-1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}.$$

Ví dụ. $\frac{-1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0$.



Bài tập 1.54. Cắt một tấm bìa hình tròn thành bốn phần không bằng nhau như trên hình vẽ. Đặt các miếng bìa đã cắt cạnh nhau để được:

a) $\frac{1}{4}$ hình tròn;

b) $\frac{1}{2}$ hình tròn:

c) $\frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}$ và $\frac{12}{12}$ hình tròn.

Bài tập 1.55. Điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng dưới:

$\frac{-3}{5}$	+	$\frac{1}{2}$	=	
+		+		+
$\frac{-1}{4}$	+	$\frac{-5}{6}$	=	
=		=		=
	+		=	

Bài tập 1.56. Hùng đi xe đạp, 10 phút đầu đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường, 10 phút thứ hai đi được $\frac{1}{4}$ quãng đường, 10 phút cuối cùng đi được $\frac{2}{9}$

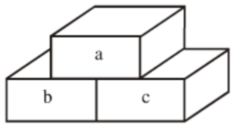
quãng đường. Hỏi sau 30 phút, Hùng đi được bao nhiêu phần quãng đường?

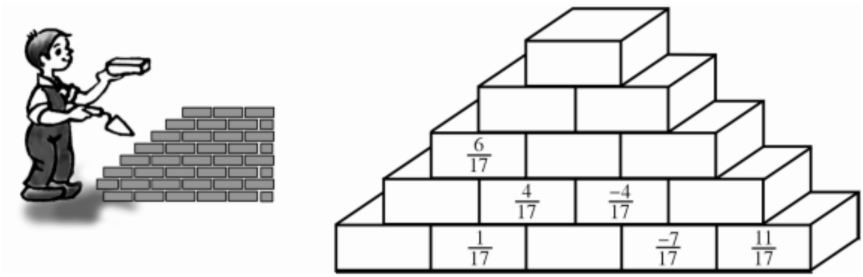
Bài tập 1.57. Điền số thích hợp vào ô trống:

a	$\frac{6}{27}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{5}$
b	$\frac{5}{27}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{3}$	
a+b		$\frac{11}{23}$				$\frac{8}{5}$

Bài tập 1.58. "Xây tường".

Em hãy "xây bức tường" ở hình sau bằng cách điền các phân số thích hợp vào các viên gạch theo quy tắc: $a = b + c$ nếu b và c nằm sát phía dưới a.





Bài tập 1.59. * Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{5}{2}.$$

Em có biết: Phân số Ai Cập?

Từ thời Ai Cập cổ đại cách đây 4-5000 năm, người ta đã biết làm một thứ cuộn giấy, gọi là *papyrus* từ một loại lau sậy, và viết trên đó thành sách. Dựa vào những papyrus được tìm thấy, các nhà khảo cổ xác định rằng những người Ai Cập cổ đại đã biết tính toán với phân số. Có điều thú vị là họ đặc biệt coi trọng các phân số có tử số bằng 1, còn những phân số khác thì được họ viết thành tổng các phân số có tử bằng 1. Ví dụ: $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$; $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; $\frac{2}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{21}$.

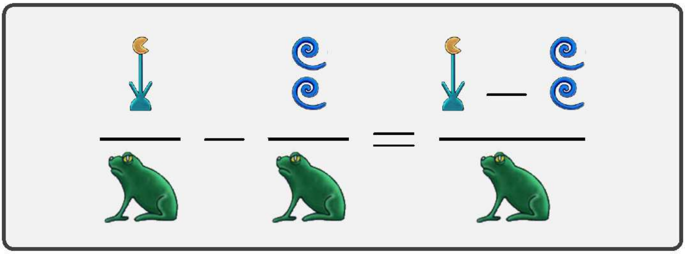
Bởi vậy, ngay nay người ta gọi *kiểu viết phân số dưới dạng tổng các* **phân số có tử bằng 1** là **phân số Ai Cập**

Vì sao người Ai Cập lại viết như vậy? Một lý do là kiểu viết đó nhiều khi thuận lợi cho việc chia phần. Ví dụ, ta muốn chia 4 cái bánh cho 7 người. Ta có thể cắt mỗi cái bánh thành 7 phần, được tổng cộng 28 phần, và cho mỗi người 4 phần bánh. Nhưng nếu ta viết

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$$

thì được cách chia khác đỡ tốn sức hơn, đó là đầu tiên chia mỗi bánh làm đôi, phát cho mỗi người nửa cái bánh, còn nửa cái cuối cùng chia làm 7 phần nhỏ để phát cho 7 người (mỗi phần nhỏ là $\frac{1}{14}$ cái bánh).

§8 Phép trừ phân số



§8.1 Quy tắc trừ phân số

Để trừ phân số $\frac{a}{b}$ cho phân số $\frac{c}{d}$, ta làm tương tự như là phép cộng phân số, chỉ có điều thay dấu cộng bằng dấu trừ:

1. Trong trường hợp hai phân số có cùng mẫu số thì ta trừ tử số thứ nhất cho tử số thứ hai và giữ nguyên mẫu số.
2. Trong trường hợp hai phân số khác mẫu số thì ta quy đồng mẫu số rồi áp dụng quy tắc phía trên.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \quad ; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

Ví dụ 1.23. Có 7 cái máy xúc phải xúc 50 mét khối cát di chuyển đi chỗ khác. Họ mới xúc được 15 mét khối. Hỏi (trung bình) mỗi máy còn phải xúc bao nhiêu mét khối nữa?

Để giải bài này, ta làm phép trừ. Mỗi máy (trung bình) phải xúc cả thảy $\frac{50}{7}$ mét khối cát, và mới xúc được $\frac{15}{7}$ mét khối, nên còn phải xúc $\frac{50}{7} - \frac{15}{7}$ mét khối. Mặt khác, số cát còn lại là $50 - 15 = 35$ mét khối, nên mỗi máy còn phải xúc $\frac{35}{7}$ mét khối. Vì hai cách tính khác nhau phải cho cùng một kết quả, nên ta có đẳng thức

$$\frac{50}{7} - \frac{15}{7} = \frac{50-15}{7} = \frac{35}{7} = 5.$$

Bài tập 1.60. Tính:

a) $\frac{1}{8} - \frac{1}{2}$; b) $\frac{-11}{12} - (-1)$; c) $\frac{3}{5} - \frac{5}{6}$;

d) $\frac{-1}{16} - \frac{1}{15}$; e) $\frac{11}{36} - \frac{-7}{24}$; f) $\frac{-5}{9} - \frac{-5}{12}$.

Bài tập 1.61. Một khu đất hình chữ nhật có chiều dài là $\frac{3}{4}$km, chiều rộng là $\frac{5}{8}$km.

a) Tính nửa chu vi của khu đất (bằng kilômet).

b) Chiều dài hơn chiều rộng bao nhiêu kilômet?

§8.2 Quy tắc đổi vế

Vì *phép trừ là phép toán ngược của phép cộng* nên ta có **quy tắc đổi vế** sau: $x - y = z$ khi và chỉ khi $x = y + z$. Quy tắc này đúng với các số bất kỳ. Nó không chỉ đúng với các số nguyên, mà cũng đúng với các phân số:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

Ví dụ 1.24. Tìm x, biết $x - \frac{3}{7} = \frac{-2}{21}$.

Giải. $x = \frac{3}{7} + \frac{-2}{21} = \frac{9}{21} + \frac{-2}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 1.25. Tìm x, biết $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{8}$.

Giải. $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x + \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Bài tập 1.62. Tìm x, biết:

a) $x - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$;

b) $\frac{-5}{6} - x = \frac{7}{12} + \frac{-1}{3}$.

Bài tập 1.63. Điền phân số thích hợp vào chỗ trống:

a) $\frac{1}{2} + \frac{\square}{\square} = \frac{-2}{3}$;

b) $\frac{-1}{3} + \frac{\square}{\square} = \frac{2}{5}$;

c) $\frac{1}{4} - \frac{\square}{\square} = \frac{1}{20}$;

d) $\frac{-8}{13} - \frac{\square}{\square} = 0$.

Bài tập 1.64. Hoàn thành phép tính:

a) $\frac{7}{9} - \frac{\square}{3} = \frac{1}{9}$;

b) $\frac{1}{\square} - \frac{-2}{15} = \frac{7}{15}$;

c) $\frac{\square}{21} - \frac{2}{3} = \frac{5}{21}$.

d) $\frac{-11}{14} - \frac{-4}{\square} = \frac{-3}{14}$;

§8.3 Số đối và biến hiệu thành tổng

Hai số gọi là **đối nhau** *nếu tổng của chúng bằng* 0.

Ví dụ 1.26. $\frac{3}{5} + \frac{-3}{5} = \frac{3 + (-3)}{5} = \frac{0}{5} = 0$, nên hai phân số $\frac{3}{5}$ và $\frac{-3}{5}$ đối nhau.

Nói một cách tổng quát, nếu $\frac{a}{b}$ là một phân số bất kỳ, thì **số đối** của nó chính là $\frac{-a}{b}$, và cũng có thể viết là $\frac{a}{-b}$.

Số đối của một số x tùy ý được ký hiệu là $-x$. Trong trường hợp x là phân số $\frac{-a}{b}$ thì số đối của nó có thể ký hiệu là $-\frac{a}{b}$. Ta có:

$$\boxed{\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0 \quad ; -\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}= \quad 0-\frac{a}{b}}$$

Sử dụng số đối, ta có quy tắc sau để **biến hiệu thành tổng**:

$$\boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}}$$

Thật vậy, nếu $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, thì theo quy tắc đổi vế và theo tính chất kết hợp, ta có:

$$\frac{e}{f}=\frac{e}{f}+\left(\frac{c}{d}+\left(-\frac{c}{d}\right)\right)=\left(\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\right)+\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right).$$

Ví dụ 1.27. $\frac{2}{7}-\frac{-1}{4}=\frac{2}{7}+\frac{-(-1)}{4}=\frac{2}{7}+\frac{1}{4}=\frac{8+7}{28}=\frac{15}{28}$.

Bài tập 1.65. Tìm số đối của các số:

$$\frac{2}{5}\ ,\ -3\ ,\ \frac{-2}{3}\ ,\ \frac{1}{-10}\ ,\ \frac{12}{7}\ ,\ 0.$$

Bài tập 1.66. Điền số thích hợp vào ô trống:

$\frac{a}{b}$	$\frac{-3}{4}$				0	Dòng 1
$-\frac{a}{b}$		$\frac{-4}{5}$		$\frac{2}{9}$		Dòng 2
$-(-\frac{a}{b})$			$\frac{-7}{11}$			Dòng3

So sánh dòng 1 và dòng 3, em nhận ra quy tắc gì?

Bài tập 1.67. Tính:

$$\frac{3}{5}-\frac{-1}{2}\;;\;\frac{-5}{7}-\frac{1}{3}\;;\;\frac{-2}{5}-\frac{-3}{4}\;;\;-5-\frac{1}{6}.$$

Bài tập 1.68. Trong một dãy phép tính chỉ có phép cộng và phép trừ phân số, ta thực hiện phép tính theo thứ tự từ trái sang phải. Điền số thích hợp vào chỗ trống để hoàn thành phép tính:

$$\frac{2}{9}+\frac{5}{-12}-\frac{-3}{4}=\frac{2}{9}-\frac{-5}{12}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4}{36}+\frac{(-5)\cdot \square}{36}+\frac{3\cdot \square}{36}=$$
$$=\frac{8-\square+\square}{36}=\frac{20}{36}=\frac{\square}{\square}.$$

Bài tập 1.69. Tính:

a) $\frac{3}{5}-\frac{-7}{10}-\frac{13}{-20}$;

b) $\frac{3}{4}+\frac{-1}{3}-\frac{5}{18}$;

c) $\frac{3}{14}-\frac{5}{-8}+\frac{-1}{2}$;

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{-3}+\frac{1}{4}-\frac{-1}{6}$.

§8.4 Liên hệ với so sánh các phân số

Tương tự như với các số nguyên, ta có **quy tắc so sánh** sau:

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0;$$
$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a}{b}-\frac{c}{d}<0;$$
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=0;$$

Bài tập 1.70. Tính hiệu của các cặp phân số sau rồi so sánh xem số nào lớn hơn số nào: $\frac{3}{10}$ và $\frac{1}{3}$; $\frac{-3}{10}$ và $\frac{1}{-3}$; $\frac{10}{3}$ và $\frac{3}{1}$; $\frac{-10}{3}$ và $\frac{3}{-1}$.

§9 Phép nhân phân số

Hình vẽ này thể hiện quy tắc gì?

$$\frac{\text{五}}{\text{四}} \cdot \frac{\text{九}}{\text{七}} = \frac{\text{五} \cdot \text{九}}{\text{四} \cdot \text{七}}$$

§9.1 Nhân phân số với số nguyên

Muốn nhân một số nguyên với một phân số (hoặc một phân số với một số nguyên), ta nhân số nguyên với tử của phân số và giữ nguyên mẫu.

$$m \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot m = \frac{a \cdot m}{b}$$

Ví dụ 1.28. Có hai loại hoa cúc, đỏ và vàng. Mỗi bông cúc vàng có số cánh bằng $\frac{13}{21}$ lần số cánh của một bông cúc đỏ. Hỏi bốn bông cúc vàng thì có tổng số cánh bằng mấy lần số cánh của một bông cúc đỏ?

Để giải bài toán, ta phải nhân $\frac{13}{21}$ với 4, tức là lấy 4 lần $\frac{13}{21}$:

$$4 \cdot \frac{13}{21} = \frac{4 \cdot 13}{21} = \frac{52}{21}.$$

Ta có thể hình dung là mỗi bông cúc vàng có 13 cánh và mỗi bông cúc đỏ có 21 cánh. (Có những loại hoa như cúc như thế thật, và các số 13 và 21 gọi là các số Fibonacci rất hay gặp trong tự nhiên). Khi đó, 4 bông cúc vàng có tổng cộng $4 \cdot 13 = 52$ cánh, và bằng $\frac{52}{21}$ lần số cánh của một bông cúc đỏ.

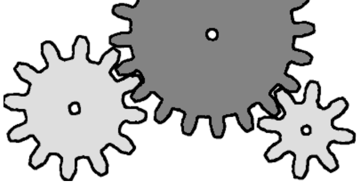
▶ ***Chú ý:*** *Công thức* $m \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot m = \frac{a \cdot m}{b}$ *vẫn đúng kể cả khi* a, b, m *có thể là số âm.*

? Tính: $\frac{5}{3} \cdot 9$; $(-3) \cdot \frac{-5}{11}$; $\frac{5}{13} \cdot (-4)$; $\frac{-17}{30} \cdot 0$.

Vì một số nguyên m bất kỳ có thể viết dưới dạng phân số $\frac{m}{1}$, nên phép nhân phân số với số nguyên là trường hợp riêng của phép nhân hai phân số với nhau.

§9.2 Quy tắc nhân phân số

Ví dụ 1.29. Có ba bánh răng cưa A, B, C lắp ráp vào nhau. Răng cưa A cứ quay được 1 vòng thì răng cưa B quay được $\frac{6}{10}$ vòng, và răng cưa B cứ quay được 1 vòng thì răng cưa C quay được $\frac{5}{2}$ vòng. Hỏi răng cưa A quay được 1 vòng thì răng cưa C quay được bao nhiêu vòng?



Để giải bài toán trong ví dụ này, ta phải làm phép tính nhân:

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{2} = \frac{6 \cdot 5}{10 \cdot 2} = \frac{30}{20}$$

Rút gọn phân số, ta được kết quả là $\frac{3}{2}$ vòng.

> ***Muốn nhân hai phân số, ta nhân các tử với nhau và nhân các mẫu với nhau.***
> $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Vì sao có quy tắc nhân như trên? Để cảm nhận điều này, ta xét bài toán 3 răng cưa tổng quát: răng cưa A quay được 1 vòng thì răng cưa B quay được $\frac{a}{b}$ vòng, và răng cưa B quay được 1 vòng thì răng cưa C quay được $\frac{c}{d}$ vòng. Khi đó, theo khái niệm về phép nhân, khi răng cưa A quay được 1 vòng thì răng cưa C phải quay được $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ vòng.

Mặt khác, nếu ta hình dung A có a cái răng thì B có b cái răng (để sao cho khi A quay được 1 vòng, tức là quay được a cái răng, thì B cũng quay được a cái răng, tức là $\frac{a}{b}$ vòng). Còn nếu A có $a \cdot c$ cái răng thì B có $b \cdot c$ cái răng, vì $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$. Và nếu B có $b \cdot c$ cái răng thì C có $b \cdot d$ cái răng, vì $\frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c}{d}$. Như vậy, nếu ta hình dung A có $a \cdot c$ cái răng thì B có $b \cdot c$ cái răng và C có $b \cdot d$ cái răng, và khi A quay được 1 vòng thì C quay được $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ vòng.

Vì hai cách tính khác nhau cho cùng một kết quả nên $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

? Phân số $\frac{6}{35}$ có thể viết dưới dạng tích của hai phân số có tử và mẫu là các số nguyên dương có một chữ số. Chẳng hạn: $\frac{6}{35} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$.

Hãy tìm các cách viết khác.

▶ ***Chú ý:*** *Quy tắc nhân* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ *vẫn đúng khi tử và mẫu của các phân số có thể là số âm.*

Ví dụ 1.30. $\frac{-3}{7} \cdot \frac{2}{-5} = \frac{(-3) \cdot 2}{7 \cdot (-5)} = \frac{-6}{-35} = \frac{6}{35}$.

Bài tập 1.71. Nhân các phân số (chú ý rút gọn nếu có thể):

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$; b) $\frac{3}{10} \cdot \frac{25}{42}$; c) $\frac{-5}{11} \cdot \frac{4}{13}$;

d) $\frac{-28}{33} \cdot \frac{-3}{4}$; e) $\frac{15}{-17} \cdot \frac{34}{45}$; f) $\left(\frac{-3}{5}\right)^2$.

Bài tập 1.72. Tính diện tích và chu vi một khu đất hình chữ nhật có chiều dài $\frac{2}{3}$km và chiều rộng $\frac{1}{5}$km.

Bài tập 1.73. Nhân các phân số (chú ý rút gọn nếu có thể):

a) $\frac{-1}{4}.\frac{1}{3}$; b) $\frac{-2}{5} \cdot \frac{5}{-9}$; c) $\frac{-3}{4} \cdot \frac{16}{17}$;

d) $\frac{-8}{3} \cdot \frac{15}{24}$; e) $(-5).\frac{8}{15}$; f) $\frac{-9}{11} \cdot \frac{5}{18}$.

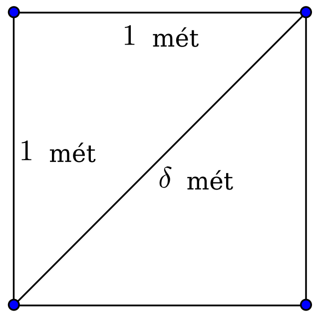
Bài tập 1.74. Tìm x, biết:

a) $x - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.\frac{2}{3}$; b) $\frac{x}{126} = \frac{-5}{9}.\frac{4}{7}$.

Bài tập 1.75. * Cặp phân số $\frac{5}{2}$ và $\frac{5}{3}$ có tính chất là tổng của chúng bằng tích của chúng: $\frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{15}{6} + \frac{10}{6} = \frac{25}{6}$ và $\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{25}{6}$. Hãy tìm các cặp phân số khác có cùng tính chất như vậy.

Bài tập 1.76. * Viết $\frac{21}{50}$ thành tích của hai phân số có mẫu số dương theo các cách khác nhau. Có tổng cộng bao nhiêu cách viết?

Em có biết: Số hữu tỷ và số vô tỷ?



Nếu ta lấy một hình vuông có cạnh dài 1 mét, thì đường chéo của nó có độ dài chính xác là δ mét, trong đó δ là một số dương (có thể biểu diễn bởi một điểm trên trục số nằm bên phải số 0) thỏa mãn tính chất $\delta^2 = 2$. Người ta gọi δ là căn bậc hai của 2 và viết $\delta = \sqrt{2} \approx 1{,}4142...$

Có điều, α không thể viết được dưới dạng phân số: không tồn tại hai số nguyên a và b nào so cho $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Thật vậy, nếu $\sqrt{2}$ viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$, thì bằng cách rút gọn, ta có thể giả sử a và b nguyên tố cùng nhau. Bình phương hai vế đẳng thức $\alpha = \frac{a}{b}$, ta được $2 = \frac{a^2}{b^2}$, suy ra $a^2 = 2b^2$, suy ra a là số chẵn, $a = 2c$, suy ra $b^2 = 2c^2$, suy ra b cũng là số chẵn, tức là a và b cùng chia hết cho 2 chứ không nguyên tố cùng nhau, mâu thuẫn. Dó đó $\sqrt{2}$ không thể viết được dưới dạng phân số.

Những số viết được dưới dạng phân số thì gọi là **số hữu tỷ** (tiếng Anh: rational number, số "có lý trí"), còn những số nằm trên trục số nhưng không viết được dưới dạng phân số thì gọi là **số vô tỷ** (irrational number). Ngoài $\sqrt{2}$ còn có vô vàn các số vô tỷ khác. Ví dụ như $\pi = 3{,}141592...$, là chu vi của đường tròn có đường kính bằng 1, cũng là một số vô tỷ. Nhưng để chứng minh điều này đòi hỏi nhiều kiến thức toán học.

§10 Các tính chất của phép nhân phân số

Khi nhân nhiều phân số, ta có thể đổi chỗ hoặc nhóm các phân số lại theo bất cứ cách nào ta muốn.

? *Phép nhân số nguyên có những tính chất cơ bản gì?*

§10.1 Các tính chất

Tương tự phép nhân số nguyên, phép nhân phân số có các tính chất cơ bản sau:

a) **Tính chất giao hoán**: $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{a}{b}$

b) **Tính chất kết hợp**: $\left(\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d}\right) \cdot \dfrac{p}{q} = \dfrac{a}{b} \cdot \left(\dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{p}{q}\right)$

c) **Nhân với số 1**: $1 \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b} \cdot 1 = \dfrac{a}{b}$

d) **Tính chất phân phối** của phép nhân đối với phép cộng:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{p}{q}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q}$$

Các tính chất này có thể suy ra được từ các tính chất tương ứng của phép nhân số nguyên và quy tắc nhân phân số. Ví dụ như tính chất giao hoán:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c \cdot a}{d \cdot b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

Bài tập 1.77. Em hãy suy ra tính chất kết hợp của phép nhân phân số từ tính chất kết hợp của phép nhân số nguyên.

§10.2 Áp dụng

Do các tính chất giao hoán và kết hợp của phép nhân, khi nhân nhiều phân số, ta có thể đổi chỗ hoặc nhóm các phân số lại theo bất cứ cách nào sao cho việc tính toán được thuận tiện.

Ví dụ 1.31. Tính tích $M = \frac{-9}{13} \cdot \frac{11}{7} \cdot \frac{13}{-9} \cdot (-14)$.

Giải: Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{-9}{13} \cdot \frac{13}{-9} \cdot \frac{11}{7} \cdot (-14) \quad \text{(tính chất giao hoán)} \\ &= \left(\frac{-9}{13} \cdot \frac{13}{-9}\right) \cdot \left(\frac{11}{7} \cdot (-14)\right) \quad \text{(tính chất kết hợp)} \\ &= 1 \cdot (-22) \\ &= -22 \quad \text{(nhân với số 1).} \end{aligned}$$

? *Hãy vận dụng tính chất cơ bản của phép nhân để tính giá trị các biểu thức sau:* $A = \frac{7}{11}.\frac{-3}{41}.\frac{11}{7}$; $\quad B = \frac{-5}{9}.\frac{13}{28} - \frac{13}{28}.\frac{4}{9}$.

Bài tập 1.78. Trong hai câu sau đây, câu nào đúng?

1) *Để nhân hai phân số cùng mẫu, ta nhân hai tử với nhau và giữ nguyên mẫu.*

2) *Tích của hai phân số bất kì là một phân số có tử là tích của hai tử và mẫu là tích của hai mẫu.*

Bài tập 1.79. Điền các số thích hợp vào bảng sau:

a	$\frac{-2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{15}$	0	$\frac{13}{19}$	$\frac{-5}{11}$	
b	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{-2}{6}$	1	$\frac{-6}{13}$			$\frac{-19}{43}$
$a \cdot b$								$\frac{13}{19}$	0	0

Bài tập 1.80. Tính:

a) $5 \cdot \frac{-3}{10}$; b) $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{14}{25}$;

c) $\frac{1}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{15}$; d) $(\frac{3}{4} + \frac{-7}{2}) \cdot (\frac{2}{11} + \frac{12}{22})$.

Bài tập 1.81. Tính giá trị các biểu thức sau một cách hợp lí:

a) $A = \frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} + \frac{12}{19}$; b) $B = \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{13} + \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{13} - \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{13}$;

c) $C = \left(\frac{67}{111} + \frac{2}{33} - \frac{15}{117}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)$.

Bài tập 1.82. Hoàn thành bảng nhân sau (chú ý rút gọn kết quả nếu có thể):

$\times$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-5}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{-1}{24}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$			
$\frac{-5}{6}$				
$\frac{7}{12}$				
$\frac{-1}{24}$				

Bài tập 1.83. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = a.\frac{1}{2} + a.\frac{1}{3} - a.\frac{1}{4} \quad \text{với} \quad a = \frac{-4}{5};$$
$$B = \frac{3}{4}.b + \frac{4}{3}.b - \frac{1}{2}.b \quad \text{với} \quad b = \frac{6}{19};$$
$$C = c.\frac{3}{4} + c.\frac{5}{6} - c.\frac{19}{12} \quad \text{với} \quad c = \frac{2002}{2003}.$$

Bài tập 1.84. (Tìm tên một nhà toán học Việt Nam thời trước). Em hãy tính các tích sau rồi viết chữ tương ứng với đáp số đúng vào các ô trống. Khi đó em sẽ biết được tên một nhà toán học Việt Nam nổi tiếng ở thế kỉ XV.

T. $\frac{-2}{3}.\frac{-3}{4}$ U. $\frac{6}{7}.1$ E. $\frac{16}{17}.\frac{-17}{32}$ H. $\frac{13}{19}.\frac{-19}{13}$

G. $\frac{15}{49}.\frac{-84}{35}$ O. $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{-8}{9}$ N. $\frac{-5}{16}.\frac{-18}{5}$ I. $\frac{6}{11}:\frac{-1}{7}.0.\frac{3}{29}$

V. $\frac{7}{6}.\frac{36}{14}$ L. $\frac{3}{-5}.\frac{1}{3}$

$\frac{-1}{5}$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{-36}{49}$		-1		3		$\frac{9}{8}$	
	$\frac{6}{7}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{-1}{2}$		0		-1

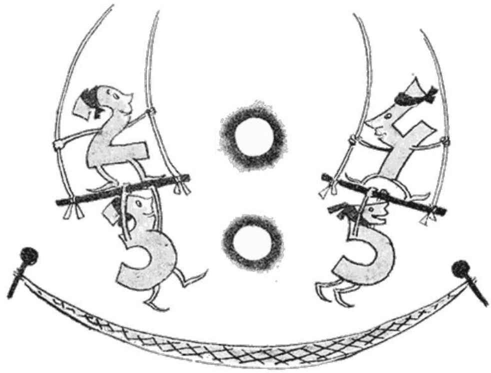
Bài tập 1.85.

Toán vui. Một con ong và bạn Dũng cùng xuất phát từ A đến B. Biết rằng mỗi giây ong bay được 5m và mỗi giờ Dũng đạp xe đi được 12km. Hỏi con ong hay bạn Dũng đến B trước?

Bài tập 1.86.

Lúc 6 giờ 50 phút bạn Việt đi xe đạp từ A để đến B với vận tốc 15 km/h. Lúc 7 giờ 10 phút bạn Nam đi xe đạp từ B để đến A với vận tốc 12 km/h. Hai bạn gặp nhau ở C lúc 7 giờ 30 phút. Tính quãng đường AB.

§11 Phép chia phân số



Tiết mục nhào lộn. Tranh từ truyện toán "*Ba ngày ở nước Tí Hon*".

§11.1 Quy tắc chia phân số

Người ta có thể định nghĩa phép chia như là *phép tính ngược lại* của phép nhân: $x : y = z$ có nghĩa là $x = y \cdot z$. Ví dụ, có 6 cái kẹo chia cho 3 bạn thì mỗi bạn được $6 : 3 = 2$ cái, và khi mỗi bạn được nhận 2 cái kẹo thì 3 bạn được nhận cả thảy $3 \cdot 2 = 6$ cái kẹo. Đối với các phân số cũng vậy, ta có thể viết như sau:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Ví dụ 1.32. Tìm x sao cho $x : \dfrac{3}{10} = \dfrac{20}{5}$.

Ta chỉ việc làm phép nhân $x = \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{20}{5} = \dfrac{3 \cdot 20}{10 \cdot 5} = \dfrac{3 \cdot 2}{5} = \dfrac{6}{5}$.

? Tìm x sao cho $x : \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{16}$.

Từ định nghĩa của phép chia, ta có **quy tắc chia phân số** sau đây:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Thật vậy, đặt $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$, ta có $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{e}{f}$. Nhân cả hai vế của đẳng thức cho $\dfrac{d}{c}$ rồi rút gọn, ta được: $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{e}{f} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{c \cdot e \cdot d}{d \cdot f \cdot c} = \dfrac{e}{f}$, có nghĩa là $\dfrac{e}{f} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Bài tập 1.87. Hoàn thành các phép tính sau:

a) $\dfrac{2}{3} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3} . \dfrac{\square}{1} = \dfrac{\square}{\square}$;

b) $\dfrac{-4}{5} : \dfrac{3}{4} = \dfrac{\square}{\square} . \dfrac{4}{3} = \dfrac{\square}{\square}$;

c) $-2 : \dfrac{4}{7} = \dfrac{-2}{1} : \dfrac{4}{7} = \dfrac{-2}{1} . \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$.

Bài tập 1.88. Thực hiện phép chia:

a) $\dfrac{5}{9} : \dfrac{5}{-3}$; b) $24 : \dfrac{-6}{11}$; c) $\dfrac{9}{34} : \dfrac{3}{17}$.

d) $\dfrac{-5}{6} : \dfrac{3}{13}$; e) $\dfrac{-4}{7} : \dfrac{-1}{11}$; f) $-15 : \dfrac{3}{2}$;

Bài tập 1.89. Người ta đóng 225 lít nước khoáng vào loại chai $\dfrac{3}{4}$ lít. Hỏi đóng được tất cả bao nhiêu chai?

Bài tập 1.90. Một tấm bìa hình chữ nhật có diện tích là $\dfrac{2}{7}m^2$, chiều dài là $\dfrac{2}{3}m$. Tính chu vi của tấm bìa đó.

§11.2 Số nghịch đảo

Hai số gọi là **nghịch đảo** *của nhau nếu tích của chúng bằng 1.*

Trường hợp đặc biệt của phép nhân, khi số bị chia bằng 1, ta có $1 : \frac{c}{d} = \frac{d}{c}$, ứng với $\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = \frac{c \cdot d}{d \cdot c} = 1$. Có nghĩa là, số nghịch đảo của phân số $\frac{c}{d}$ chính là phân số $\frac{d}{c}$ (hoán vị tử thành mẫu, mẫu thành tử), và ta có thể phát biểu lại quy tắc chia phân số như sau:

Muốn chia một phân số cho một phân số, ta nhân số bị chia với số nghịch đảo của số chia.

Ví dụ 1.33. $\frac{2}{3}$ là số nghich đảo của $\frac{3}{2}$. -8 là số nghịch đảo của $\frac{1}{-8}$, $\frac{-4}{7}$ là số nghich đảo của $\frac{7}{-4}$.

▶ ***Chú ý:*** *Để có thể làm phép chia* $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ *thì ta phải có* $\frac{c}{d} \neq 0$*, tức là* $c \neq 0$*. Đó cũng là điều kiện để tồn tại số nghịch đảo* $\frac{d}{c}$ *của* $\frac{c}{d}$.

? Tìm số ngịch đảo của $\frac{1}{7}$; -5 ; $\frac{-11}{10}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Bài tập 1.91. Phân số $\frac{6}{35}$ có thẻ viết dưới dạng thương của hai phân số có tử và mẫu là các số nguyên dương có một chữ số: *Chẳng hạn:* $\frac{6}{35} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{5} : \frac{7}{3}$. Em hãy tìm ít nhất một cách viết khác.

Bài tập 1.92. Tính nhanh: a) $\frac{17}{256} : \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{17}{256}\right)$; b) $\frac{7}{8} + \frac{25}{8} : 25 - \frac{5}{9}$.

Bài tập 1.93. Tìm x, biết:

a) $\frac{4}{7} \cdot x = \frac{8}{5}$; b) $\frac{5}{6} : x = \frac{1}{2}$.

Bài tập 1.94. Tìm x, biết:

a) $x.\frac{3}{7} = \frac{2}{3}$; b) $x : \frac{8}{11} = \frac{11}{3}$; c) $\frac{2}{5} : x = \frac{-1}{4}$;

d) $\frac{4}{7}.x - \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$; e) $\frac{2}{9} - \frac{7}{8}.x = \frac{1}{3}$; f) $\frac{4}{5} + \frac{5}{7} : x = \frac{1}{6}$.

§11.3 Chia phân số cho số nguyên

Một trường hợp đặc biệt của phép chia phân số là khi số chia $\frac{c}{d}$ có mẫu số $d = 1$, tức là số chia là một số nguyên. Trong trường hợp này, quy tắc chung về phép chia phân số cho ta quy tắc sau

Muốn chia một phân số cho một số nguyên khác 0, ta giữ nguyên tử của phân số và nhân mẫu với số nguyên.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b.c} \quad (c \neq 0).$$

Bài tập 1.95. Tính:

a) $\frac{5}{6} : \frac{-7}{12}$; b) $-7 : \frac{14}{3}$; c) $\frac{-3}{7} : 9$.

d) $0 : \frac{-7}{11}$; e) $\frac{3}{4} : (-9)$. f) $\frac{-4}{13} : 2$;

Bài tập 1.96. a) Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:
$\frac{2}{7} : 1$; $\frac{2}{7} : \frac{3}{4}$; $\frac{2}{7} : \frac{5}{6}$; $\frac{2}{7} : \frac{5}{4}$; $\frac{2}{7} : \frac{4}{3}$.

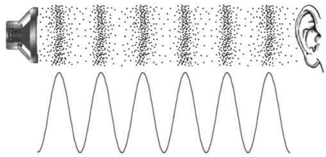
b) So sánh số chia với 1 trong mỗi trường hợp.

c) So sánh giá trị tìm được với số bị chia rồi rút ra kết luận.

Bài tập 1.97. Một con thuyền bơi ngược dòng từ bến A đến bến B với vận tốc 10 km/h hết $\frac{1}{3}$ giờ. Khi từ B về A, nó bơi xuôi dòng với vận tốc 12 km/h. Tính thời gian để nó đi từ B về A.

Em có biết: Phân số trong âm nhạc?

Các âm thanh được tạo ra bởi sự co vào giãn ra liên tục của không khí (hay các môi trường khác). Sự co giãn không khí đó lan tỏa như là sóng từ nơi phát ra âm thanh với vận tốc 1236 km/h, đập vào tai ta, khiến ta nghe thấy âm thanh.



Âm thanh tạo bởi không khí co vào giãn ra.

Âm thanh mà chúng ta nghe thấy thường là hỗn hợp, nhưng có thể phân tích thành tổng của các sóng tuần hoàn đơn giản "hình sinus". Mỗi sóng tuần hoàn đơn giản chính là một nốt nhạc.

Các nốt nhạc được phân loại theo tần số của chúng. Ví dụ như nốt La "chuẩn" của cung bậc (octave) thứ 4 (ký hiệu là A4) có tần số 440 Herz (Hz), tức là không khi có vào giãn ra đúng 440 lượt trong 1 giây. Cứ mỗi khi tần số tăng lên gấp đôi hay giảm đi một nửa, thì nốt nhạc vẫn được gọi tên như cũ, nhưng ở cung bậc cao lên thay thấp đi: Nốt nhạc có tần số 880Hz gọi là nốt A5 (nốt La của octave thứ 5), còn 220Hz là A3, v.v...

Người ta chia mỗi octave thành 12 nốt nhạc, trong đó, theo quy ước, có 7 nốt "chính" và năm nốt "phụ". Chúng được đặt tên lần lượt theo thứ tự từ thấp đến cao như sau: C (do) $< C^\sharp = D^\flat$ (C thăng $= D$ giáng) $< D$ (re) $< D^\sharp = E^\flat < E$ (mi) $< F$ (fa) $< F^\sharp = G^\flat < G$ (sol) $< G^\sharp = A^\flat < A$ (la) $< A^\sharp = B^\flat < B$ (si) $< C$ (do của octave tiếp theo). Tần số của các nốt nhạc được định nghĩa theo cấp số nhân: nốt trước chia cho nốt sau là một hằng số (không phụ thuộc vào vị trí của nốt).

Nhà toán học Pythagoras (c. 570 - c. 495 TCN) chính là cha tổ của lý thuyết âm nhạc. Ông đã phát hiện ra rằng các nốt nhạc mà có tỷ lệ tần số là một phân số với mẫu số và tử số nhỏ, hoặc gần bằng một số như vậy với sai số rất nhỏ, thì "ăn dơ" với nhau, "cộng hưởng" với nhau, đánh lên cùng lúc nhau thì nghe êm tai.

Ví dụ, nốt B (si) đánh với nốt B cùng cung bậc hay trên một cung bậc thì cộng hưởng rất mạnh, vì tỷ lệ tần số là $1 : 1$ hoặc $1 : 2$. Nhưng cũng có những cặp nốt khác tên nhau mà cộng hưởng mạnh với nhau, theo phân số $\frac{3}{2}$ (hay $\frac{2}{3}$ nếu so sánh ngược lại), với độ sai số rất chi là nhỏ. Đó là những nốt mà trong âm nhạc gọi là "nốt thứ 5 hoàn hảo". Ví dụ, bắt đầu từ nốt C (do), chỉ đếm theo các nốt chính (bỏ qua các nốt phụ), ta có C, D, E, F, G (sol), tức là G (sol) là nốt "thứ năm hoàn hảo" của C (do).

Cũng teo quy tắc cộng hưởng đó, người ta tạo các bộ ba nốt nhạc (triad) nghe êm tai. Ví dụ như bộ do-mi-sol gọi là một "bộ ba trưởng", đánh lên thì nghe êm tai và vui vẻ. Tần số của chúng tỷ lệ thuận với $3 : 4 : 5$ (hoặc $4 : 5 : 6$, tùy cách chọn cung bậc), tức là nếu tần số của do là 3x thì của mi là 4x và của sol là 5x (với x nào đó). Khi chia các tần số này cho nhau ta được các phân số như là $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}$ với tử số và mẫu số đều nhỏ.

(Trích từ sách "*Toán học và nghệ thuật*", Tủ sách Sputnik, Số 024.)

§12 Hỗn số. Số thập phân. Phần trăm.

§12.1 Hỗn số

Ta đã biết rằng các phân số dương **không chính tắc**, tức là các phân số lớn hơn 1, có thể viết dưới **hỗn số** nếu tử không chia hết cho mẫu. (Nếu tử chia hết cho mẫu thì nó là số nguyên).

Ví dụ, phân số $\frac{11}{4}$ không chính tắc. Chia 11 cho 4 ta được 2 và dư 3. Vậy ta có thể viết $\frac{11}{4}$ dưới dạng hỗn số như sau:

$$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

? *Viết các phân số sau dưới dạng hỗn số:* $\frac{17}{4}, \frac{21}{5}$.

Ngược lại, ta cũng có thể viết một hỗn số dưới dạng phấn số. Chẳng hạn:

$$3\frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{16}{5}.$$

? *Viết các hỗn số sau dưới dạng phân số:* $1\frac{4}{9}, 3\frac{2}{7}$.

Các số $-5\frac{1}{4}, -2\frac{3}{5}, \ldots$ cũng gọi là hỗn số. Chúng lần lượt là số đối của các hỗn số $5\frac{1}{4}, 2\frac{3}{5}, \ldots$.

▶ ***Chú ý:*** *Khi viết một phân số âm dưới dạng hỗn số, ta chỉ cần viết số đối của nó dưới dạng hỗn số rồi đặt dấu âm trước kết quả nhận được.*

Ví dụ: $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$ nên $\frac{-7}{5} - 1\frac{2}{5}$. Tương tự, $3\frac{3}{7} = \frac{24}{7}$ nên $-3\frac{3}{7} = -\frac{24}{7}$.

Bài tập 1.98. Viết các phân số sau đây dưới dạng hỗn số:

$$\frac{6}{5}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{-16}{11}.$$

Bài tập 1.99. Viết các hỗn số sau đây dưới dạng phân số:

$$5\frac{1}{7}, \quad 6\frac{3}{4}, \quad -1\frac{12}{13}.$$

Bài tập 1.100. So sánh các phân số: $\frac{22}{7}$ và $\frac{34}{11}$.

Bài tập 1.101. Khi cộng hai hỗn số $3\frac{1}{5}$ và $2\frac{2}{3}$, bạn Cường làm như sau:

$$3\frac{1}{5} + 2\frac{2}{3} = \frac{16}{5} + \frac{8}{3} = \frac{48}{15} + \frac{40}{15} = \frac{88}{15} = 5\frac{13}{15}.$$

a) Bạn Cường đã tiến hành cộng hai hỗn số như thế nào?

b) Có cách nào tính nhanh hơn không?

Bài tập 1.102. Bạn Hoàng làm phép nhân $4\frac{3}{7} \cdot 2$ như sau:

$$4\frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{31}{7} \cdot \frac{2}{1} = \frac{62}{7} = 8\frac{6}{7}.$$

Có cách nào tính nhanh hơn không? Nếu có, hãy giải thích nó.

Bài tập 1.103. Thực hiện phép nhân hoặc chia hai hỗn số bằng cách viết hỗn số dưới dạng phân số:

a) $5\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{4}$; b) $6\frac{1}{3} : 4\frac{2}{9}$.

Bài tập 1.104. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = 3\frac{1}{5} - \left(2\frac{5}{6} + 4\frac{1}{5}\right)$; b) $B = \left(13\frac{3}{9} + 3\frac{1}{2}\right) - 4\frac{3}{9}$.

§12.2 Số thập phân

Thập phân có nghĩa là *chia mười*: một to bằng mười nhỡ, một nhỡ bằng mười nhỏ, một nhỏ bằng mười nhỏ hơn, và cứ thế.

Các con số mà chúng ta dùng ngày nay hay được viết dưới dạng **số thập phân**. Ví dụ số 1234,56 có nghĩa là một nghìn hai trăm ba mươi bốn và thêm năm phần mười sáu phần trăm. Một nghìn thì bằng mười lần một trăm, một trăm bằng mười lần mười, mười bằng mười lần đơn vị, đơn vị bằng mười lần của một phần mười, một phần mười bằng mười lần của một phần trăm, v.v.

Các số thập phân (với hữu hạn chữ số) có thể viết dưới dạng phân số có mẫu là lũy thừa của 10. Một phân số như vậy gọi là **phân số thập phân**. Ví dụ:

$$12{,}345 = \frac{12345}{1000} = \frac{12345}{10^3}.$$

Ngược lại, phân số thập phân có thể viết dưới dạng số thập phân:

$$\frac{2017}{10^2} = \frac{2017}{100} = 20{,}17\ ;\ \frac{-256}{100} = -2{,}56$$

Số thập phân gồm hai phần: **phần số nguyên** viết bên trái dấu phẩy, và **phân thập phân** viết bên phải dấu phẩy. Số chữ số của phần thập phân đúng bằng số chữ 0 ở mẫu (tức là bằng bậc lũy thừa của 10 ở mẫu) của phân số thâp phân.

? *Viết các phân số sau đây dưới dạng số thập phân:*

$$\frac{27}{100},\quad \frac{-13}{100},\quad \frac{261}{100000}.$$

? Viết các số thập phân sau đây dưới dạng phân số thập phân:

$$1,21; \quad 0,07; \quad -2,013.$$

Bài tập 1.105. Một số đơn vị đo độ dài của Anh có giá trị như sau: 1 inch = 2,54 cm, 1 ft = 304,8 mm, 1 yard = 3 ft = 914,4 mm, 1 furlong = 201168 mm. Hãy đổi các độ dài đó ra mét (viết kết quả dưới dạng phân số thâp phân rồi dưới dạng số thập phân).

Bài tập 1.106. a) Khi chia một số cho 0,5 ta chỉ việc nhân số đó với 2. Ví dụ: $37 : 0{,}5 = 37 \cdot 2 = 74$; $102 : 0{,}5 = 102 \cdot 2 = 204$. Hãy giải thích tại sao lại làm được như vậy?

b) Hãy tìm hiểu cách làm tương tự khi chia một số cho 0,25; cho 0,125. Cho các ví dụ minh họa.

§12.3 Phần trăm

Những phân số có mẫu là 100 còn được viết dưới dạng phần trăm với kí hiệu %. Ví dụ: $\frac{3}{100} = 3\%$; $\frac{107}{100} = 107\%$.

? *Viết các số thập phân sau đây dưới dạng phân số thập phân và dưới dạng dùng kí hiệu %:* $3{,}7 = \frac{37}{10} = \frac{370}{100} = 370\%$, $6{,}3 = \ldots$, $0{,}34 = \ldots$.

Bài tập 1.107. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân và dùng kí hiệu %:

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{9}{25}, \quad \frac{17}{4}, \quad \frac{33}{50}.$$

Bài tập 1.108. Viết các phần trăm sau dưới dạng số thập phân:

$$7\%, \quad 45\%, \quad 216\%.$$

▶ ***Chú ý:*** *Vì ký hiệu % đã trở thành rất phổ biến và tiện lợi, đặc biệt trong việc thống kê, nên người ta hay dùng % để biểu diễn cả những số mà không viết được dưới dạng phân số có mẫu bằng 100.*

Ví dụ 1.34. Trong một cuộc bầu cử có ba ứng cử viên A, B, C và 2315 phiếu bầu. Kết quả: A được 1114 phiếu, B được 673 phiếu, C được 528 phiếu. Như vậy, A được $\frac{1112}{2315} \approx 0{,}4812$ số phiếu, và người ta nói rằng A được $42{,}12\%$ số phiếu (vì $42{,}12 : 100 = 0{,}4812$).

Bài tập 1.109. Hãy tính tỷ lệ phần trăm số phiếu mà các ứng cử viên B và C nhận được trong ví dụ trên.

§12.4 Em có biết: Lịch sử ký hiệu phần trăm?

Trong tiếng La tinh (là gốc của nhiều tiếng châu Âu), từ *phần trăm* viết là *per cento*. Những người viết tốc ký hay phải dùng từ này, nhưng vì nó dài nên người ta viết tắt cho nhanh. Đầu tiên người ta bỏ “per” đi, chỉ còn “cento”. Rồi người ta viết tắt “cento” thành “cto”. Rồi khi viết ngoáy thì chữ t ở giữa biến thành một cái gạch chéo, còn chữ c được viết xoáy thành tròn rồi nối vào gạch chéo của chữ t ở phía trên. Sau một quá trình biến đổi do viết tắt như vậy, *per cento* dần dần chuyển thành ký hiệu % mà chúng ta biết đến ngày nay!

(Trích từ truyện toán “*Thuyền trưởng đơn vị*” của Vladimir Levshin, Tủ sách Sputnik, số 020).