Chào mừng ngày Nhà giáo Việt Nam!

SPUTNIK NEWSLETTER

Số 11-2017

Những dấu hiệu của một hệ thống giáo dục tốt

Số 11-2017

SPUTNIK NEWSLETTER

Tạp chí điện tử về khoa học và giáo dục phổ thông
Liên hệ bài vở: newsletter@sputnikedu.com
Trang web: http://sputnikedu.com
Các trang tranh minh họa: Lấy từ sách *Thuyền trưởng đơn vị*

Mục lục

1 Chào mừng ngày 20-11! *3*
2 Những dấu hiệu của một hệ thống giáo dục tốt (Nguyễn Tiến Dũng) *5*
3 Học toán để làm gì? Học toán để làm giàu! (Trần Nam Dũng) *19*
4 Trò chơi hay là khoa học? (Vladimir Levshin) *24*
5 Hành tinh của những chuyện thần thoại (N.A. Vilenkin) *34*
6 Định lý Bayes - Nền tảng của học máy thống kê (Đặng Trần Thái và Hồ Tú Bảo) *42*
7 Bất đẳng thức Schur và những bài toán có lời giải thú vị (Nguyễn Huy Trung) *55*
8 Học ngoại ngữ như thế nào? *64*
9 Mụ phù thủy Baba Yaga (song ngữ Anh-Việt) *72*

Chào mừng ngày 20-11!

Chúng tôi, các thành viên của Sputnik Education và các công tác viên thường xuyên của Sputnik Newsletter hầu hết là nhà giáo, trong đó có: GS. Nguyễn Tiến Dũng, TS. Trần Nam Dũng, GS. Hà Huy Khoái, GS. Đỗ Đức Thái, ThS Lê Bích Phượng, Thầy Ngô Văn Minh, Cô Nguyễn Thúy Hằng, GS. Phạm Hi Đức, GS. Nguyễn Hùng Sơn, PGS. Chu Cẩm Thơ, Thầy Bùi Việt Hà, TS. Nguyễn Văn Minh, v.v.

Đối với chúng tôi, mỗi nhà giáo đều là một người rất quan trọng góp phần vào sự nghiệp giáo dục của Việt Nam.

Nhân dịp Ngày Nhà giáo Việt Nam, chúng tôi xin gửi đến các nhà giáo lời chúc mừng chân thành nhất!

Hy vọng rằng tất cả chúng ta sẽ cùng nhau hợp tác thúc đẩy nền giáo dục của Việt Nam đi theo chiều hướng tiến bộ!

Mỗi nhà giáo là một VIP!

Đối với SputnikShop, mỗi nhà giáo đều là một khách VIP, cần được ưu đãi khi trong việc mua các sản phẩm về giáo dục.

Nếu bạn đọc là nhà giáo, dù là dạy học ở trường công hay trường tư hay làm quản lý, xin hãy nhớ lại mã giảm giá sau cho các nhà giáo:

NHAGIAO

Mỗi khi mua sách hoặc những thứ khác trực tuyến trên

`http://shop.sputnikedu.com`

hoặc qua email, điện thoái đến SputnikShop, xin hãy ghi mã giảm giá trên khi thanh toán, đồng thời ghi nơi làm việc (liên quan đến giáo dục), để được phục vụ tận tình và được tự động giảm giá thêm so với các khách hàng bình thường.

Kể cả đối với các sản phẩm khuyến mại đặc biệt trên SputnikShop, ví dụ như Bộ sách "Gợi mở cảm hứng toán học" đã giảm từ 842K VND giá bìa xuống còn 650K, miễn phí vận chuyển và kèm quà tặng, thì khi điền mã NHAGIAO vào vẫn được giảm giá thêm (trong khoảng 5-10%, giá chính xác được báo trước khi khách hàng gửi lệnh mua).

Những dấu hiệu của một hệ thống giáo dục tốt

Nguyễn Tiến Dũng

Nhân ngày Nhà giáo Việt Nam, chúng ta hãy thử cùng nhau điểm xem đâu là những dấu hiệu của một nền giáo dục tốt, để rồi từ đó rút ra các kết luận về việc các nước phải cải cách hệ thống giáo dục theo những hướng nào cho tốt lên.

1. Giáo viên có lương cao và trình độ cao

Các nhà chính trị của nước nào mà chẳng giỏi nói những lời hoa mĩ kiểu như "giáo dục là quốc sách". Nhưng lời nói có đi đôi với thực tế hay không, thì phải xem các thông tin, số liệu cụ thể.

Nếu như giáo dục đúng là rất quan trọng, thì nhà giáo phải được coi trọng. Sự coi trọng này trước hết thể hiện qua việc các giáo viên có thu nhập cao và trình độ cao. Xin lấy hai ví dụ điển hình là Phần Lan và Hàn Quốc.

Phần Lan thường được coi là nước có nền giáo dục phổ thông tiên tiến nhất thế giới. Thu nhập bình quân của người Phần Lan đứng thứ 16-17 trên thế giới nhưng lương giáo viên của Phần Lan thì đứng thứ 8 trên thế giới, và vào khoảng 42 nghìn USD một năm. Điều đó có nghĩa là, tính cả về tuyệt đối và tương đối, Phần Lan trả lương cho giáo viên cao hơn so với các nước khác. Xem chẳng hạn:

`https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_average_wage`

https://www.worlddata.info/average-income.php

https://www.theguardian.com/teacher-network/teacher-blog/2014/sep/05/how-the-job-of-a-teacher-compares-around-the-world

So với Phần Lan thì Hàn Quốc còn ấn tượng hơn nhiều. Nếu cách đây nửa thế kỷ, Hàn Quốc còn lạc hậu ngang với Việt Nam thời đó, thì ngày nay Hàn Quốc đã trở thành một nước tiên tiến, về nhiều mặt còn hiện đại hơn Pháp. Ngoài chuyện có thể chế tốt, không bị kìm hãm bởi giáo điều hay tham nhũng như một số nước chậm tiến, điểm đặc biệt khiến cho Hàn Quốc phát triển mạnh chính là sự chú trọng thực sự đến khoa học công nghệ và giáo dục.

Điều này thể hiện rất rõ ở mức thu nhập của giáo viên: theo các link phía trên, lương trung bình của giáo viên tại Hàn Quốc đạt 47 nghìn USD một năm, đứng thứ 5 trên thế giới, trong khi thu nhập bình quân của Hàn Quốc vào khoảng 30 nghìn USD một năm, mới chỉ đứng thứ 24 trên thế giới. Nếu so sánh tương đối, thì ở Hàn Quốc các giáo viên có lương bằng khoảng 1,3 lần lương của những người có trình độ học vấn tương đương, trong khi trên thế giới (và ngay cả ở Phần Lan) tỷ lệ này là dưới 1. Xem:

https://www.brookings.edu/blog/brown-center-chalkboard/2016/06/20/teacher-pay-around-the-world/

Tất nhiên, ở đâu có thu nhập cao, ở đó sẽ thu hút được người giỏi, và có quyền đòi hỏi trình độ cao. Ở những nước tiên tiến như Phần Lan hay Thụy Sĩ, sư phạm là ngành có đầu vào rất cạnh tranh (trái ngược hẳn với tình trạng "chuột chạy cùng sào mới vào sư phạm"), và các giáo viên nói chung cần có trình độ thạc sĩ.

Ắt hẳn, bạn cũng muốn con mình được học những thầy cô giáo là những người mô phạm có văn hóa cao trên mức trung bình của xã

Một lớp học ở Hàn Quốc. Nhiều giáo viên giỏi ở Hàn Quốc có thu nhập hàng triệu USD từ việc dạy thêm.

hội. Và văn hóa cao ứng với thu nhập cao là điều hợp lý.

Khi các giáo viên sống được đàng hoàng bằng nghề của mình, không phải lo cái ăn suốt ngày, thì mới có thể tập trung vào chuyên môn, mới có được nhiều thời gian quan tâm đến học sinh, và mới dễ vui vẻ, hạnh phúc, truyền được lại cái hạnh phúc đó cho học sinh. Ít ra, giáo viên cần được coi trọng tương đương với cảnh sát về mặt chế độ thu nhập, nếu muốn có một nền giáo dục tốt.

2. Minh bạch, không tham nhũng

Không phải vô cớ mà những nước phồn vinh nhất trên thế giới cũng là những nước minh bạch, ít tham nhũng. Sự minh bạch giúp cho các khoản đầu tư đến được đúng địa chỉ cần thiết, thúc đẩy xã hội tiến lên. Ngược lại, ở đâu có nhiều tham nhũng, ở đó các khoản

đầu tư không đến được đúng nơi cần đến, nên xã hội khó phát triển.

Đối với giáo dục cũng vậy. Ví dụ, nếu một giáo viên trẻ phải mất 500 triệu VND tiền tham nhũng mới được một chân biên chế với mức lương 30 triệu một năm (bằng cả 17 năm lương!), thì thử hỏi giáo viên đó có còn tiền để sống, để đầu tư vào bản thân, vào việc nâng cấp chuyên môn không, hay là mất nhiều thời gian hơn vào việc bươn trải kiếm sống, hoặc tệ hơn nữa là tìm các cách làm tiền không tử tế.

Như một vòng luẩn quẩn, sự tham nhũng của ngành giáo dục tạo ra xu hướng tham nhũng trong giáo viên, rồi trong từng học sinh, và khi các học sinh này trưởng thành đã quen với thói tham nhũng sẽ tiếp tục giữ xã hội trong trạng thái tham nhũng, khó tiến bộ.

Để xóa tham nhũng trong xã hội, một điểm cần chú trọng làm trước là xóa tham nhũng trong ngành giáo dục, đặc biệt là ở các cấp quản lý, để cho người thầy sống được đàng hoàng chứ không cần tham nhũng, mới truyền đạt được các giá trị tốt đẹp đến học sinh.

3. Trung thực, không gian dối

Ở các nước tiên tiến, sự trung thực rất được đề cao trong giáo dục. Các hành động gian dối như đạo văn và quay cóp được coi là những tội rất nặng, bị cả xã hội lên án, và có thể dẫn đến đình chỉ học tập ngay lập tức. Các sinh viên có thể cầm bài về nhà làm với lời hứa là sẽ tự làm và họ giữ đúng lời hứa không nhờ ai làm hộ.

Những nền giáo dục trung thực như vậy tạo ra những con người trung thực, đáng tin, có thể tin tưởng nhau trong công việc và ở ngoài xã hội, và đó là biểu hiện của văn minh. Ví dụ như ở Thụy Sĩ, có những quầy bán báo không có người canh, ai mua thì tự trả tiền

vào hộp và tự lấy báo, như thế tiết kiệm được sức lao động, nhưng hệ thống như vậy chỉ hoạt động được khi mọi người trung thực.

Ngược lại với trung thực là gian dối, và nhiều khi người gian dối nhất chính là các nhà quản lý và các giáo viên đầu têu cho cấp dưới và học trò của mình gian dối nhằm đạt thành tích giả.

Tôi còn nhớ, khi còn bé đi học lớp vẽ ở câu lạc bộ thiếu nhi, vẽ tranh dự thi, được thầy giáo dặn là khai giảm đi một tuổi. Có thể là thầy làm thế với ý tốt, và tất cả những người khác cũng làm như vậy. Việc khai giảm tuổi của những cầu thủ bóng đá nổi tiếng ở Việt Nam chắc cũng chẳng phải do các cầu thủ đó tự nghĩ ra, mà do các ông bầu, bởi luật bất thành văn lâu nay người ta vẫn làm thế. Nhưng nếu xã hội cứ có thói quen "nói vậy mà không phải vậy" ở tất cả mọi chỗ thì về sau thật khó phân biệt thật giả, và hệ quả là đồ giả đánh bại đồ thật.

Các học sinh khi đi học đã quen với gian dối thì khi trưởng thành sẽ dễ trở thành lừa đảo, và điều này thật tai hại cho xã hội khi mà "một người làm, năm người lừa".

Căn bệnh hám thành tích giả và căn bệnh gian dối đi liền với nhau. Để giảm gian dối, cần loại bỏ được gốc của các thành tích giả, và áp dụng các công nghệ, quy trình kiểm tra hiện đại khiến cho học sinh có muốn cũng khó gian dối hơn.

Những căn bệnh tham nhũng và giả dối thật nan giải, bởi vì trong một xã hội tham nhũng và gian dối thì những ai quá thật thà và không tham nhũng sẽ rất dễ bị bắn ra lề xã hội, khó làm nổi cái gì. Quá trình minh bạch hóa, trung thực hóa sẽ đòi hỏi thay đổi lớn về chính sách và thể chế, để con người ta giảm nhu cầu tham nhũng và dối trá đi.

4. Khai phóng, không giáo điều

Đối với nhiều học sinh trên thế giới, môn lịch sử là môn rất thú vị. Bởi học sinh ngoài việc nghe giảng, đọc sách, còn được đi thăm quan các hiện vật khảo cổ, được tranh luận tự do. Và các sách học lịch sử, ví dụ như của Pháp, viết tương đối khách quan, có nhìn nhận vấn đề từ nhiều chiều, nhiều quan điểm, có chỉ ra những lỗi lầm của cả chính nước mình, chứ không theo kiểu giáo điều "ta đúng địch sai, ta thắng địch thua".

Ở nơi có quá nhiều dập khuôn, giáo điều, học sinh không được phép sáng tạo, không được phép viết theo ý của mình, kể cả khi làm văn. Hệ quả tất yếu là sẽ tạo ra những thế hệ người thụ động, mất khả năng sáng tạo và tự suy nghĩ phải trái cho mình.

Ngay cả trong những môn khoa học tự nhiên như toán, sự giáo điều cũng có thể bóp nghẹt giáo dục. Một ví dụ gần đây là tranh cãi nảy ra ở Việt Nam về chuyện "có 8 cái chuồng mỗi chuồng 4 thỏ thì phải viết phép tính thế nào để tìm tổng số thỏ, 8×4 hay 4×8". Những giáo viên khăng khăng chỉ có một trong hai cách đó là cách đúng có lẽ là những người đã bị giáo điều làm cho xơ cứng.

5. Không bỏ rơi con nhà nghèo

Ngày xưa, Nhật Bản cũng là nước nghèo, nhiều gia đình không đủ ăn, và chính phủ đã cấp sữa uống miễn phí ở trường học cho trẻ em, để đứa trẻ nào cũng có điều kiện ăn học. Ngày nay, Nhật Bản đã là một nước tiên tiến phồn vinh, nhưng trẻ em của các gia đình khó khăn vẫn được ăn trưa miễn phí ở trường. Xem chẳng hạn:

http://www.businessinsider.fr/us/japans-amazing-school-lunch-program-2017-3/

Nước Pháp và nhiều nước khác cũng có những chính sách hỗ trợ tương tự cho con nhà nghèo: ăn miễn phí, trợ cấp tiền sách vở đi lại, v.v. Chính sách trợ giúp học sinh nghèo là một biểu hiện của một nền giáo dục tốt, bởi không những nó nhân đạo, mà nó còn là tối ưu về ích lợi của việc đầu tư công.

Khi chính phủ trợ cấp cho học sinh nghèo, tiền đó có thể coi là khoản đầu tư có hiệu quả, tạo ra những con người phát triển tốt hơn, đóng góp được cho xã hội nhiều hơn sau này, thay vì là nếu không được học hành họ sẽ mãi mãi sống trong nghèo đói và cũng không đem lại được nhiều giá trị cho xã hội.

Tất nhiên các trường tư thì phải thu học phí để có tiền chi tiêu. Nhưng ngay cả các trường tư tốt ở những nước tư bản giàu như Mỹ cũng dành các suất học miễn học phí cho con em các gia đình nghèo mà có chí hướng học tập. Đó là biểu hiện của một nền giáo dục tốt.

Nhưng ở nơi nào mà người ta thương mại hóa các trường công, thu học phí cao khiến cho con nhà nghèo không thể vào học được dù nhà gần và có học lực tốt, thì đó là làm ngược lại với chính sách "không bỏ rơi con nhà nghèo", và là biểu hiện của một nền giáo dục xuống cấp.

6. Thi cử đơn giản và hiệu quả

Việc kiểm tra kiến thức, hoặc thi tuyển chọn (khi số suất có ít mà số ứng cử viên lại nhiều) là cần thiết. Nhưng một hệ thống giáo dục tốt sẽ làm sao cho những việc đó không gây tốn kém quá nhiều về thời gian và tiền của, cho cả học sinh lẫn nhà giáo. Một số ví dụ:

- Ở cấp tiểu học đã cần gì chấm điểm phức tạp, thay vào đó chỉ nhận xét "đã nắm vững kiến thức", "đang nắm", "còn chưa nắm được" là đủ.

- Ngay cả đối với sinh viên đại học, những điểm kiểm tra chính xác tới 0,25 hầu hết cũng không cần thiết, mà chỉ cần biết ở mức "nắm tốt, khá, tạm được, yếu" là đủ. Theo nghĩa này, hệ thống chấm điểm của Nga (chỉ có 4 mức điểm: 2 = trượt, 3 = đỗ trung bình, 4 = khá, 5 = giỏi) là hệ thống hiệu quả.

- Chỉ có ở những kỳ thi học sinh giỏi hoặc tuyển chọn, nơi mà hơn kém nhau chút xíu là đã phân biệt có được giải hay được chọn hay không, mới cần chấm thật chính xác li ti.

- Các hệ thống chấm điểm tự động bằng máy càng ngày càng hiệu quả lên, vừa khách quan vừa nhanh vừa đỡ tốn thời gian của giảng viên, với điều kiện là đề ra và quy trình trình bày lời giải phải hợp lý.

7. Tôn trọng, khích lệ và rèn rũa học sinh

Hiện tượng giáo viên dùng bạo lực, nhục hình với học sinh (đánh, nhốt, v.v.) vẫn còn xảy ra ở một số nơi trên thế giới, và đó là một biểu hiện của sự phản giáo dục, dù cho các giáo viên (hay phụ huynh học sinh) có làm thế với mục đích tốt chứ không có ý xấu. Bởi vì, từ quan điểm hiện đại, học sinh cũng là con người, và mỗi con người đều có phẩm giá thiêng liêng bất khả xâm phạm, cần được tôn trọng.

Có những vị giáo sư thóa mạ sinh viên thậm tệ, ví dụ như viết vào bài kiểm tra làm không tốt những câu bình luận "anh là mối nguy hiểm cho xã hội, chị đi học làm gì cho phí cơm". Đây cũng là một kiểu bạo lực, bạo lực về tinh thần.

Ở một số nước như Thụy Điển, việc đánh trẻ em, dù chỉ là đánh vào mông, dù đó là bố đánh con, bị coi là tội phạm hình sự, có thể bị đi tù. Đó là bởi vì họ đã có nhận thức sâu sắc về quyền con người của trẻ em.

Tôn trọng trẻ em (và sinh viên), không đánh trẻ em, không trì triết thóa mạ trẻ em, không có nghĩa là bất lực không rèn được trẻ em, mà chỉ có nghĩa là các nhà giáo và các cha mẹ cần động não nhiều hơn, tìm ra các hình thức rèn rũa trẻ em không bạo lực mà hiệu quả hơn.

Không bạo lực không có nghĩa là mềm yếu. Không bạo lực nhưng vẫn có thể kiên quyết, cứng rắn, thể hiện thái độ rõ ràng, rèn học sinh vào kỷ luật, trong khi vẫn tỏ ra tôn trọng và yêu mến học sinh. Trẻ em vừa cần được tôn trọng và khích lệ, và vừa cần được rèn rũa.

Cuối cùng thì các biện pháp không bạo lực về lâu về dài sẽ có hiệu quả cao hơn là các biện pháp bạo lực, trong giáo dục cũng như trong cuộc sống. Ngay đối với các cuộc cách mạng, các thống kê trên thế giới cho thấy các cuộc cách mạng không bạo lực thường đem lại kết quả tốt đẹp hơn so với các cuộc cách mạng bạo lực. Xem chẳng hạn:

Chenoweth, E., & Stephan, M. J. (2011). Why civil resistance works: The strategic logic of nonviolent conflict. Columbia University Press.

8. Có nhiều lựa chọn cho học sinh

Chúng ta bình đẳng với nhau, nhưng không có nghĩa phải giống nhau, phải ngang bằng với nhau về mọi thứ. Chúng ta sinh ra với các điều kiện hoàn cảnh khác nhau, với các sở trường sở đoản sở thích

khác nhau.

Bởi vậy, một hệ thống giáo dục tốt sẽ có nhiều lựa chọn về chương trình khác nhau cho nhiều loại học sinh khác nhau, chứ không chỉ có mỗi một chương trình chung bắt tất cả phải "gọt chân cho vừa giày".

Ví dụ như việc phân ban ở PTTH là một biểu hiện tốt để học sinh có lựa chọn ban nào phù hợp với mình nhất (và tất nhiên có thể chuyển từ ban này sang ban khác nếu thấy ban khác hợp hơn).

Việc có các chương trình thích ứng với hoàn cảnh của các học sinh ở miền núi, khác với chương trình cho học sinh ở thành thị, cũng là một điều cần thiết đối với một hệ thống giáo dục tốt, trong khi mà điều kiện ở miền núi quá khác xa so với điều kiện ở thành thị. Và những học sinh có năng khiếu đặc biệt có chương trình đặc biệt để phát triển năng khiếu, cũng là dấu hiệu của một hệ thống giáo dục tốt.

Cấm các trường năng khiếu sẽ là chính sách giáo dục tồi, vì như thế nhu cầu của các học sinh có năng khiếu sẽ không được đáp ứng, năng khiếu của họ không có điều kiện phát triển.

Ngay đối với sách giáo khoa, việc có nhiều bộ sách khác nhau để học sinh và giáo viên có thể lựa chọn bộ nào thích hợp với mình nhất cũng là biểu hiện của một nền giáo dục tốt.

Nếu các sách giáo khoa bị độc quyền, có mỗi một bộ, không có gì để chọn, thì dù cho bộ đó có hay mấy cũng không thể thích hợp với toàn bộ các học sinh, và hơn nữa sự độc quyền thường kéo theo trì trệ, khó có chất lượng cao.

9. Chú trọng cả tinh thần và thể chất

Một bộ óc dù có thông minh đến mấy nhưng đặt trong một cơ thể ốm yếu dễ mệt mỏi thì cũng khó có sức để làm được nhiều điều hay ho. Bởi vậy, thể chất quan trọng không kém gì tinh thần, và học sinh cần được tạo điều kiện, tạo thói quen rèn luyện sức khỏe từ bé, để lớn lên có cuộc sống khỏe mạnh ít bệnh tật, vui vẻ và hữu ích.

Trẻ em bình thường nói chung là ham hoạt động, và chỉ lười biếng đi khi không được khuyến khích và không có điều kiện để hoạt động, lâu ngày mất dần thói quen.

Các trường học trong một hệ thống giáo dục tốt sẽ có sân chơi rộng, phòng tập thể dục thể thao, v.v. Ở Pháp, tất cả các học sinh đều được trường cho học bơi, và đây là một điểm hay của nền giáo dục Pháp.

Nếu như ở trường không có nhiều điều kiện cho các học sinh luyện tập thể thao, thì các gia đình cần tự cho con mình đi tập thể thao ngoài giờ để bù vào.

Thời tôi còn học đại học ở Moskva cách đây 30 năm, ở có chính sách là tất cả các sinh viên phải học rèn luyện thể chất ít nhất mấy tiếng một tuần. Chỉ có điều hơi lạ là họ coi môn cờ vua cũng được tính vào luyện tập thể chất, nên có những sinh viên đăng ký học đánh cờ vua vì lười tập thể dục.

10. Kết hợp hài hoà giữa ở trường và ở nhà

Hầu hết các kiến thức học ở trường, với sự hướng dẫn chỉ bảo của thầy cô và thảo luận cùng bạn bè, là những kiến thức bổ ích mà học ở

trường hiệu quả hơn nhiều so với tự học ở nhà không có người hướng dẫn.

Nhưng cũng có những kiến thức, kỹ năng quan trọng mà ở trường ít có điều kiện dạy, cần được học ở nhà hay học ngoại khóa ở nơi khác, ví dụ như nấu ăn hay chơi đàn.

Bởi vậy một nền giáo dục tốt sẽ kết hợp hài hòa giữa học ở trường và học ở nhà: trường đảm bảo những cái gì mà mà học ở trường là hiệu quả nhất, những cái còn lại là học ở nhà hoặc học ngoại khóa.

Cũng chính vì vậy, trẻ em cần nhiều thời gian dành cho những thứ khác so với những thứ học ở trường: các môn nghệ thuật, thể thao ngoại khóa, nấu nướng, tự phục vụ bản thân, v.v.

Và như vậy, ở trường không nên giao quá nhiều bài về nhà cho học sinh, và học sinh cũng không nên mất quá nhiều thời gian vào việc đi học thêm (những thứ về nguyên tắc phải được học ở trường), mà nên dành thời gian cho các hoạt động vui chơi và học tập khác mà nếu chỉ học theo chương trình ở trường thôi thì sẽ bị thiếu.

11. Liên tục đổi mới và nâng cấp chất lượng

Quá trình đổi mới của một hệ thống giáo dục tốt là một quá trình liên tục và hài hòa, thay dần những công nghệ, quy trình, sản phẩm, cách thức cũ bằng những cái mới tốt hơn, chứ không phải là một quá trình giật cục lâu lâu lại "đại cải cách"một lần.

Ví dụ như sách giáo khoa, trong một hệ thống giáo dục tốt thì mỗi năm sách lại được chỉnh sửa cải tiến một chút, cập nhật số liệu và kiến thức, v.v., chứ không phải là cứ đợi 10 năm mới lại có một đợt cải cách thay đổi toàn bộ.

Các công nghệ mới, thành tựu mới của thế giới cũng cần được liên tục đưa vào hệ thống giáo dục. Ví dụ như, việc sử dụng các công cụ máy tính ngày càng phổ biến, và cần được đưa vào dùng trong nhà trường những thứ hiện đại thay vì những thứ cổ lỗ.

Nếu cách đây 30 năm, việc dạy lập trình máy tính cho học sinh sinh viên bằng ngôn ngữ Pascal có thể coi là chuẩn mực, thì ngày nay làm như thế đã thành lạc hậu, cần thay bằng các ngôn ngữ khác hiện đại tiện lợi hơn. Và nếu như cách đây 10 năm cái gọi là "học sâu"(deep learning) trong trí tuệ nhân tạo còn là thứ mù mờ chưa rõ ràng, thì ngày nay nó đã thành một môn học mà các khoa tin học tiên tiến không thể thiếu.

Tất nhiên, việc nâng cấp chất lượng liên tục này bao gồm cả việc tăng thu nhập cho giáo viên, và việc nâng cao trình độ giáo viên qua các khóa học.

12. Cơ chế tốt và người quản lý tử tế

Như chúng ta thấy, có rất nhiều biểu hiện của một nền giáo dục tốt, và các biểu hiện đó có thể được dùng như những cái cột mốc để bám vứu vào nhằm đẩy giáo dục đi lên. Nhưng có thực hiện được không, điều này phụ thuộc rất nhiều vào cơ chế và người quản lý.

Cần có nhiều người quản lý tử tế, thực sự có trình độ và tâm huyết, hiểu biết về giáo dục, và cơ chế thích hợp, thì nền giáo dục mới dễ tốt lên được. Nhưng chi tiết của mục cuối này vượt ngoài khuôn khổ của bài viết.

5
4
3
2
1
1/2
1/3

Học toán để làm gì?
Học toán để làm giàu!

Trần Nam Dũng

Ngày 17.9.2017, tại trường quốc tế châu Á Thái Bình Dương (APC) đã diễn ra Ngày hội toán học nhỏ do Viện nghiên cứu cao cấp về toán bảo trợ chuyên môn và các công ty và tổ chức giáo dục tại Tp HCM và HN đồng tổ chức. Xem video:

`https://www.youtube.com/watch?v=v2fAfEfZW9c`

Tâm điểm của ngày hội là buổi Toạ đàm "Học toán: Để làm gì?

Học những gì? Học như thế nào?" với sự tham gia của 4 vị khách mời: GS Vũ Hà Văn (GS ĐH Yale, giáo sư mời của đại học NUS), kỹ sư Nguyễn Anh Nguyên (thủ khoa đầu ra ĐH Bách khoa Tp HCM, công tác trong lĩnh vực sản xuất, phân phối), nhà báo Phạm Hy Hưng (nguyên phó tổng biên tập báo Sài Gòn tiếp thị) và tiến sĩ Trần Nam Dũng (giảng viên khoa Toán-Tin học trường Đại học khoa học tự nhiên).

MC Nguyễn Cẩm Tú mở đầu buổi toạ đàm với câu hỏi dành cho các diễn giả "Học toán để làm gì". GS Vũ Hà Văn, với lối nói điềm đạm, câu văn khúc triết đã tóm tắt 4 động cơ học toán.

- Một là học toán cho cuộc sống hàng ngày, tức là cộng trừ nhân chia, tính chi phí, lãi suất, phần trăm . . . Cái này ai cũng phải học.

- Hai là toán giải trí, toán thể thao, tức là toán olympic. Loại toán

này giúp người giải rèn khả năng vượt qua khó khăn, có cảm giác sung sướng khi giành chiến thắng. Toán này ai thích thì tham gia, thường là 5-10%.

- Ba là học toán để làm việc kiếm tiền. Ngoài một số ít làm toán chuyên nghiệp thì các ngành nghề khác cũng cần toán (ở mức độ khá chuyên sâu): bác sỹ, kỹ sư, kiến trúc sư, nghiên cứu thị trường, nghiên cứu xã hội học, an toàn thông tin, bảo mật thông tin, lưu trữ dữ liệu, xử lý tín hiệu, nông nghiệp, ngư nghiệp...

- Cuối cùng, một động cơ học toán nữa là học toán để thông minh hơn, để rèn luyện tư duy logic.

Buổi toạ bắt đầu nóng lên với câu hỏi "Tại sao phải học đạo hàm, tích phân, logarit? Tôi thấy trong công việc của tôi, cộng trừ nhân chia là quá đủ".

Lúc này TS Trần Nam Dũng vào cuộc với một luận điểm khá là gay gắt "Nếu chỉ học cộng trừ nhân chia thôi thì tất nhiên ta vẫn sống được. Nhưng nếu bạn là người tham gia vào sản xuất, phân phối, dịch vụ thì bạn sẽ góp phần đưa nền kinh tế nước ta với thời kỳ 1.0, 1.5 hay cùng lắm là 2.0, trong khi thế giới đã bước sang thời kỳ 4.0".

TS Dũng nêu ra một ví dụ: Giá một kg cà phê chỉ khoảng 5-7USD. Nước ngoài mua về, chế biến thành sản phẩm, có mẫu mã đẹp, có thể bán (giá xuất xưởng) lên đến 100 USD. Vậy là trong 100 USD đó, người trồng cà phên chỉ được 5%. Ta phải học để tăng tỷ trọng miếng bánh của mình trong miếng bánh chung, không để nước ngoài "bóc lột".

Kỹ sư Nguyễn Anh Nguyên tiếp tục với một ví dụ khác: "Đơn giản chỉ là bài toán lưu kho. Xếp đặt hàng hoá tối ưu có thể tiết kiệm được quãng đường di chuyển của xe nâng, từ đó làm giảm số lượng xe cần

sử dụng, dẫn đến tiết kiệm nhân công, xăng xe, giảm lượng khí thải vào môi trường. Và mỗi năm có thể tiết kiệm được hàng chục tỷ đồng. Nếu chỉ biết cộng trừ nhân chia thì không giải quyết được bài toán vận trù học đó".

Không chỉ dừng lại ở những mức tiết kiệm vài chục tỷ đồng. Toán học ở mức cao còn có thể tạo ra những sản phẩm trị giá hàng tỷ đô-la. Đơn cử công thức cosine similarity, một công thức toán học rất đơn giản là cơ sở toán học của 4 công ty hàng đầu thế giới: Amazon, Facebook, Google, Netflix.

Tất nhiên, từ công thức "lõi", các chuyên gia của họ sẽ phát triển thêm thành các công thức nâng cao có tính đặc thù (và trở thành bí quyết công nghệ). Điều này cũng lý giải vì sao nhiều nhà toán học được các công ty công nghệ tuyển mộ. Đơn cử như TS Lê Viết Quốc hiện làm việc cho Google, hay GS Vũ Hà Văn cũng đã từng 2 năm làm cho một dự án của Microsoft.

Cuộc toạ đàm diễn ra ngày càng sôi động với những câu hỏi thú vị và . . . hóc búa "thông minh thì học giỏi toán hay học toán để thông minh hơn?" "người giỏi toán dường như chỉ biết làm toán, không biết làm ứng dụng?" "tại sao học sinh Việt Nam thi toán quốc tế giỏi thế mà nền toán học Việt Nam lẹt đẹt?" "có phải chúng ta đang dạy toán theo kiểu luyện gà nòi?" "người học toán xong có thể làm những ngành nghề gì". Các vị khách mời, như các dũng tướng trên chiến trường đã tả xung hữu đột trả lời các câu hỏi của hội trường một cách thuyết phục.

Cuối cùng, kỹ sư Nguyễn Anh Nguyên, một người mà dù đã 49 tuổi vẫn một tuần 2 buổi tối xách máy tính đi học Đại số tuyến tính và Xác suất thống kê đã chia sẻ với các bạn trẻ những lời tâm huyết

“Lúc này, khi còn đang học đại học, các bạn phải gắng học cho thật tốt. Nhưng ngay cả khi ra trường 5-7 năm, thậm chí 15-20 năm, các bạn vẫn phải tiếp tục học. Thế giới này biến đổi nhanh lắm. Người không học sẽ mãi mãi tụt hậu và đói nghèo. Chỉ có học tập không ngừng mới giúp ta vươn lên, làm giàu cho bản thân và cho đất nước”.

Chú thích các ảnh minh họa:

Ảnh 1: TS Trần Nam Dũng cùng với ba bạn của Sputnik tại Văn phòng Sputnik ở Hà Nội, 10/2017.

Ảnh 2: GS. Vũ Hà Văn đang phát biểu tại "Ngày hội toán học nhỏ"2017/

Ảnh 3: Một cảnh tìm hiểu các trò chơi với toán học tại "Ngày hội toán học nhỏ"2017.

Trò chơi hay là khoa học?

Vladimir Levshin

Quyển truyện toán học nổi tiếng "Thuyền trưởng Đơn vị"(Tủ sách Sputnik Số 020, bản dịch mới của GS. Nguyễn Tiến Dũng, `http://shop.sputnikedu.com/?48,captainone`) in ra từ giữa năm 2016 được rất nhiều bạn đọc ưa thích, đến nay đã gần hết sách, và Sputnik đang chuẩn bị tái bản vào tháng 11/2017 này. Nhân dịp tái bản, sách được chuyển từ in đen trắng sang in màu cho hấp dẫn hơn nữa, với các tranh màu do họa sĩ Nguyễn Hào vẽ lại dựa trên các tranh của

bản gốc. Chúng tôi xin giới thiệu ở đây một chương của quyển sách rất thú vị này, nhan đề "Trò chơi hay là khoa học?"(ngày 05 tháng Số Không của cuộc phiêu lưu trên biển). Sách hợp với mọi lứa tuổi, từ tiểu học trở lên có thể đọc hiểu.

Ngày 05 tháng Số Không

Tôi cùng với anh phụ bếp dạo chơi trên boong, ngắm con thuyền của mình đang lách giữa vô vàn các hòn đảo nhỏ, cố tránh không va vào chúng. Ở giữa mỗi đảo đều thấy treo một lá cờ trên cột cao. Trên mỗi lá cờ đều có ghi những chữ số. Chỉ có điều chúng được viết một cách rất lạ: một số này ở phía trên một số khác, và giữa hai số là một cái gạch ngang:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \ldots$$

Thuyền trưởng bảo rằng các nhà toán học viết các phân số như vậy. Thì ra, có những số không phải là số nguyên. Chỉ việc "đập"một số nguyên thành nhiều phần là được ngay một phân số.

Anh phụ bếp thì nói rằng anh rất biết đập các thứ ra thành nhiều phần. Trên thuyền không còn một cốc lành lặn nào.

Thuyền trưởng giải thích cho chúng tôi rằng các phân số nhỏ hơn đơn vị được gọi là phân số chính tắc. Trên các lá cờ của các hòn đảo này chỉ ghi các phân số chính tắc. Số đặt trên gạch ngang gọi là *tử số*, số ở dưới gạch ngang gọi là *mẫu số*. Mẫu số cho biết tử số được chia làm bao nhiêu phần. Chẳng hạn, phân số $\frac{1}{3}$ có nghĩa là chia đơn

vị thành ba phần và lấy một phần. Nó được đọc là: một phần ba.

Trong phân số chính tắc, tử số bao giờ cũng nhỏ hơn mẫu số. Còn trong phân số không chính tắc thì tử số lớn hơn mẫu số.

Nghĩa là, có những phân số lớn hơn đơn vị? Đúng thế. Nếu chia năm cho hai, ta sẽ được một phân số không chính tắc $\frac{5}{2}$, tức là năm phần hai. Nhưng nó cũng bằng hai rưỡi, và được viết như sau: $2\frac{1}{2}$. Suy ra, phân số không chính tắc lớn hơn đơn vị.

- Bây giờ, - thuyền trưởng nói, - các cháu hãy nhìn sang phía bên phải. Trước mặt các cháu là vịnh Phân Số Thập Phân.

Quả thật có loại phân số như thế. Đó là những phân số mà mẫu số là mười, hay một trăm, hay một nghìn... Tóm lại là những số cứ thế chia được liên tiếp cho mười.

Anh phụ bếp rất khoái điều đó. Anh tuyên bố từ nay sẽ chỉ đập vỡ các cái cốc ra thành mười mảnh.

Anh ấy nói thêm:

- Và cháu sẽ ghi: $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$. Có đúng không ạ?

- Cũng đúng, mà cũng không đúng. - Thuyền trưởng đáp. - Người ta thường viết phân số thập phân theo cách khác, trên một dòng. Nếu là số lớn hơn một, thì phần nguyên của nó được viết tách ra khỏi phần thập phân của nó bởi dấu phẩy. Còn với phân số nhỏ hơn một thì người ta viết số không đằng trước dấu phẩy.

- Thế người ta viết mẫu số ở chỗ nào? - Tôi hỏi.

1
0
1/6
1/2

- Người ta không viết mẫu số, - thuyền trưởng đáp, - mà chỉ hiểu ngầm thôi. Nguyên do là: ở các phân số thập phân cũng có hàng như ở các số nguyên. Chữ số thứ nhất sau dấu phảy là hàng phần mười, chữ số thứ hai là hàng phần trăm, chữ số thứ ba là hàng phần nghìn, v.v... Chẳng bạn: 0,2 đọc là hai phần mười, còn 0,02 là hai phần trăm.

Cuối cùng, thuyền trưởng yêu cầu chúng tôi đọc con số sau đây: 0,023.

Tôi bảo, dễ ợt: không số nguyên, không phần mười, hai phần trăm và ba phần nghìn.

Thuyền trưởng lấy làm lạ:

- Việc gì phải đọc như đánh vần từng hàng một thế, trong khi có thể đọc ngay hai mươi ba phần nghìn? Nếu sau dấu phẩy có ba chữ số thì tức là phải hiểu ngầm rằng phải chia số ấy cho một nghìn. Có thế thôi! Bây giờ các cháu đi gọt khoai tây đi.

Tôi cùng anh phụ bếp ngồi xuống phía đuôi thuyền và bắt tay vào công việc. Ở đây phải tích cực lao động.

Bỗng trời trở lạnh. Tuyết rơi. Mắt tôi bị tuyết bay vào, không gọt khoai nổi nữa. Tôi định chờ cho đến khi hết tuyết.

Đột nhiên - bùùùm! Một tiếng sấm vang lên dữ dội ... rồi tiếng sấm thứ hai ... rồi tiếng sấm thứ ba ... Những tia sét lóe trên bầu trời. Nhưng tuyết vẫn cứ rơi. Vừa có tuyết lại vừa có giông? Không tin được!

- Không tin được nghĩa là thế nào? - Anh phụ bếp hỏi.

- Không tin được nghĩa là hoàn toàn không thể xảy ra, - tôi giải thích.

- Sao lại không thể xảy ra khi vẫn có tiếng sấm? - Pi cười giễu.

- Đó chỉ là tình cờ, ngẫu nhiên, còn nói chung thì không thể có khả năng xảy ra.

Đúng lúc đó thuyền trưởng xuất hiện. Ông nói rằng tôi nhầm rồi. Bất kể điều gì có thể xảy ra, dù là tình cờ đến đâu, cũng đều là có khả năng xảy ra. Chỉ có điều phải đợi rất lâu để thấy nó xảy ra một lần. Người ta nói rằng trường hợp như vậy có xác suất nhỏ, tức là khả năng xảy ra nhỏ.

- Người ta có thể tính được khả năng xảy ra cơ à? - Tôi sửng sốt hỏi.

- Tất nhiên rồi. Có cả một bộ môn toán học, gọi là lý thuyết xác suất, cho việc tính toán này. Những hòn đảo chúng ta đang đi ngang qua là thuộc quần đảo Xác Suất đấy.

- Quần đảo là gì ạ? - Tôi hỏi.

- à, bác quên khuấy rằng các cháu chưa biết danh từ này. - Thuyền trưởng mỉm cười. - Một đám đảo tụ tập gần nhau thì được gọi là quần đảo.

Tuyết đã tạnh, và thuyền cập bến một hòn đảo cắm lá cờ có vẽ hình phân số $\frac{1}{2}$ - một phần hai, hay nói cách khác là một nửa. Đảo gì mà lại có mỗi một nửa!

Cư dân trên đảo niềm nở đón chúng tôi, nhưng tôi có cảm tưởng như họ đang rất bận bịu, không có thời giờ dành cho khách. Hóa ra, tất cả bọn họ đang chơi cờ vua, và thậm chí không đánh cờ mà chỉ rút thăm xem ai được đi quân trắng thôi. Một người cầm ở mỗi bàn tay một quân cờ rồi hỏi đối phương: quân trắng ở tay nào? Đoán trúng thì cả hai đều mừng rỡ.

Thuyền trưởng đề nghị những người đang chơi đưa cho ông hai

quân tốt, rồi ông nắm trong mỗi tay một quân và hỏi Pi: quân đen ở tay nào? Anh phụ bếp đoán là ở tay phải, nhưng không trúng. Khi đó tôi đoán ra ngay quân đen nằm ở tay trái, và kết luận rằng trò chơi này nhạt phèo. Nhưng thuyền trưởng nói rằng nó không nhạt phèo đâu.

- Vấn đề là, - ông nói tiếp, - trên đảo này người ta đoán màu quân cờ. Nhưng vì chỉ có hai màu đen và trắng, và chỉ phải đoán một trong hai màu đó thôi, nên người ta nói rằng xác suất đoán trúng bằng tỷ lệ giữa một và hai, tức là một phần hai. Chính vì thế mà trên lá cờ của đảo có in hình phân số này. Nếu như thay vì hai màu, chúng ta có các quân cờ với nhiều màu khác nhau - đỏ, xanh, tím, vàng, v.v... thì để đoán trúng màu của quân cờ được nắm trong tay sẽ khó hơn nhiều. Trong trường hợp đó xác suất đoán trúng sẽ giảm đi.

Nói đoạn, thuyền trưởng đưa chúng tôi đến một hòn đảo khác, có biểu tượng là phân số một phần sáu: $\frac{1}{6}$. Cư dân ở đây chơi xúc xắc. Họ có những quân xúc xắc hình lập phương bằng sừng đen. Trên sáu mặt của xúc xắc sơn các chấm trắng: mặt thứ nhất một chấm, mặt thứ hai hai chấm, v.v... cho đến mặt cuối cùng là sáu chấm. Các chấm trắng được gọi là các điểm. Một người tung quân xúc xắc, còn người kia đoán xem mặt hiện lên sẽ có mấy điểm.

Dễ hiểu rằng, ở đây người ta ít đoán trúng hơn hẳn so với ở đảo trước. Và tôi đã đoán ra xác suất đoán trúng ở đây bằng tỷ lệ giữa một và sáu, tức là một phần sáu.

- Đúng rồi! - Thuyền trưởng tán thành và lại hỏi thêm rằng xác suất đoán trúng sẽ là bao nhiêu nếu đoán quân xúc xắc sẽ hiện lên hai hoặc bốn điểm.

Tôi lại đoán ra một lần nữa, rằng trong trường hợp này xác suất sẽ tăng gấp đôi. Nó không phải $\frac{1}{6}$ nữa mà là $\frac{2}{6}$. Hay nói là $\frac{1}{3}$ cũng thế. Rồi tôi hỏi:

- Thế nếu đoán là quân xúc xắc sẽ hiện lên mấy điểm cũng được thì sao?

- Thì ta phải đến một đảo khác, - thuyền trưởng trả lời, - đến đảo Chắc Chắn. Đảo ấy kia kìa, cắm lá cờ xanh.

Bây giờ tôi mới để ý đến lá cờ màu xanh. Trên đó không in hình phân số, mà in hình số một. Tại sao thế nhỉ?

- Bởi vì trường hợp nào trong số sáu trường hợp xảy ra thì cũng là đoán trúng. - Thuyền trưởng giảng giải. - Có nghĩa là xác suất đoán trúng bằng tỷ lệ giữa sáu và sáu, $\frac{6}{6}$, tức là một. Điều có xác suất bằng một là điều chắc chắn, tức là điều đó kiểu gì cũng xảy ra.

Lúc ấy anh phụ bếp để ý thấy một hòn đảo cắm lá cờ đen với một số không to tướng màu trắng ở giữa. Thuyền trưởng nói rằng đấy là đảo Không Có Khả Năng Xảy Ra, tức là xác suất đoán trúng bằng không.

- Thế nghĩa là thế nào ạ? - Tôi và anh phụ bếp cùng thắc mắc.

- Như thế này này, - thuyền trưởng giải thích, - chẳng hạn một trong hai cháu đoán là quân xúc xắc sẽ hiện lên mặt bảy điểm.

- Làm sao có thể như thế được! - Tôi thốt lên. - Mặt xúc xắc chỉ có nhiều nhất là sáu chấm thôi cơ mà.

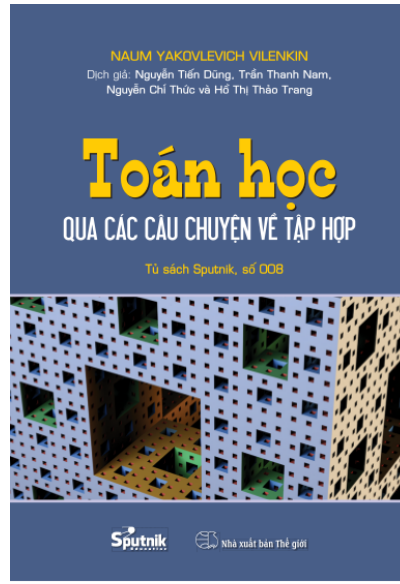
- Vấn đề chính là ở chỗ đó. - Thuyền trưởng vui vẻ nói. - Không thể hiện lên mặt xúc xắc bảy điểm. Có nghĩa là, nếu cháu đoán bảy điểm thì sẽ chẳng có khả năng nào đoán trúng. Xác suất đoán trúng bằng không!

Cái lý thuyết xác suất này là một trò chơi thú vị! Nhưng thuyền trưởng lại không hài lòng. Ông bảo rằng đây không phải là trò chơi, mà là khoa học, tuy rằng khoa học này được sinh ra từ một trò chơi. Chuyện như vậy vẫn hay xảy ra. Thuyền trưởng còn nói thêm rằng lý thuyết xác suất giúp ích rất nhiều cho các nhà bác học, các kỹ sư, và đặc biệt là các nhà kinh tế. Nó cần thiết cho nền kinh tế của đất nước, và chúng tôi sẽ sớm nhận thấy điều đó.

Khi chúng tôi quay trở lại thuyền, Pi hỏi tôi: xác suất để bữa ăn trưa hôm nay được bày ra đúng giờ là bao nhiêu? Khoai tây chúng ta vẫn chưa gọt xong! Rõ ràng: xác suất bằng không!

Hành tinh của những chuyện thần thoại

N.A. Vilenkin



Quyển sách phổ biến kiến thức của nhà toán học nổi tiếng người Nga N.A. Vilenkin nhan đề *Toán học qua các câu chuyện về tập hợp* được Sputnik Education xuất bản vào tháng 10/2017 (Tủ sách Sputnik, Số 008, `http://shop.sputnikedu.com/?86,sets_vilenkin`, có trong các bộ sách của Sputnik) đã nhanh chóng trở thành "hàng hót"thu hút rất nhiều bạn đọc. Sách viết về nhiều ý tưởng của toán học hiện đại (lý thuyết tập hợp, lô gích, giải tích, tô-pô, hình học fractal, v.v.) một cách rất hóm hỉnh và dễ hiểu, học sinh THCS cũng có thể tiếp cận được. Dưới đây chúng tôi xin giới thiệu một mục trong quyển sách này với nhan đề "Hành tinh của những chuyện thần thoại".

Một lần, trong lúc đang ngồi cà-phê trong câu lạc bộ của những người du lịch Liên ngân hà, một thành viên danh dự của câu lạc bộ, một Munchhausen của kỷ nguyên vũ trụ[1], Ion Lặng Lẽ[2] đã kể rằng:

"Hạ cánh trên hành tinh Hesiod rất khó khăn. Nhưng khi tôi đã ở trên bề mặt của nó, tôi đã lấy làm hối hận vì quyết định đáp xuống nơi đây. Hành tinh này là nơi sinh sống của những con quái vật, còn đáng ghê sợ hơn những quái vật được miêu tả trong thần thoại Hy Lạp cổ đại. Đón tiếp tôi là một phái đoàn gồm 1000 cư dân của hành tinh. Trong số này, có 811 cư dân chỉ có một mắt, giống như thần khổng lồ một mắt Polyphemus; 752 cư dân thay vì có những sợi tóc thì lại có những con rắn mọc ra trên đầu giống như quỷ Medusa Gorgon và 418 cư dân có đuôi cá giống nữ thần biển Nereid.

Trong số đó lại có 570 quái vật có một mắt và có mái tóc rắn, 356 quái vật có một mắt và có đuôi cá, 348 quái vật vừa có đuôi cá vừa có mái tóc rắn. Một người lớn tuổi trong số họ hướng về tôi và nói..."

Nhưng các thành viên của câu lạc bộ vẫn không biết, Ion Lặng Lẽ nghe thấy gì ở hành tinh quái vật. Nghe xong câu chuyện của nhà du lịch, giáo sư Tarantog bất chợt nảy sinh những tính toán gì đó trong đầu và kêu lên:

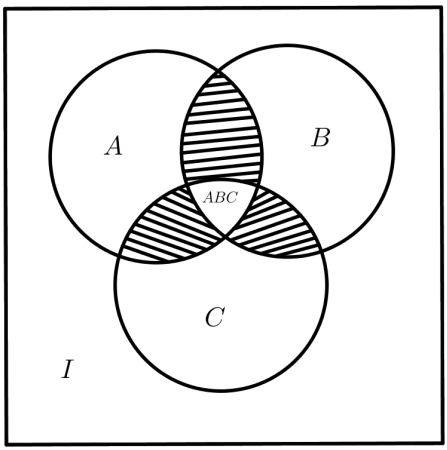
"Ion yêu quý! Tôi sẵn sàng tin rằng, trên hành tinh này có những sinh vật một mắt, có những con rắn mọc ra ở trên đầu thay cho tóc và

[1]Munchhausen là nhân vật chính của tác phẩm văn học trào phúng nổi tiếng "Những cuộc phiêu lưu kỳ thú của Nam tước Munchhausen" của văn người Đức Rudolf Erich Raspe - (ND).

[2]Các cuộc phiêu lưu của Ion Lặng Lẽ được viết trong truyện "Nhật ký các vì sao của Ion lặng lẽ " của nhà văn nổi tiếng Stanislaw Lem người Ba Lan. Tác giả hy vọng S. Lem sẽ tha thứ cho mình về việc mượn danh nhân vật này.

có đuôi cá. Bạn còn gặp những quái vật kinh dị hơn, như là kurdel[1] nhưng tôi hy vọng rằng các định luật toán học ở hành tinh này không biến thành trò hư cấu".

Tarantog lấy một chiếc khăn giấy và vẽ lên trên đó một sơ đồ (Hình 1).



Hình 1: Hình vẽ của Tarantog.

Ông nói: "Ta ký hiệu I là tập hợp tất cả các cư dân trong phái đoàn, A là tập hợp các cư dân một mắt, B là tập hợp các cư dân tóc rắn và C là tập hợp các cư dân có đuôi cá. Những tập này được biểu diễn trên hình vẽ bằng các hình tròn. Ba hình tròn chia hình chữ nhật thành 8 phần. Ta sẽ tính xem có bao nhiêu phần tử trong mỗi phần đó.

Theo điều kiện, tập hợp AB (có một mắt và tóc rắn) có 570 sinh vật, còn tập ABC (một mắt, tóc rắn và đuôi cá) có 297 sinh vật. Có nghĩa là, tập hợp $AB - ABC$ có 273 sinh vật. Đây cũng chính là tập mà trên hình vẽ được gạch bằng những đường kẻ ngang.

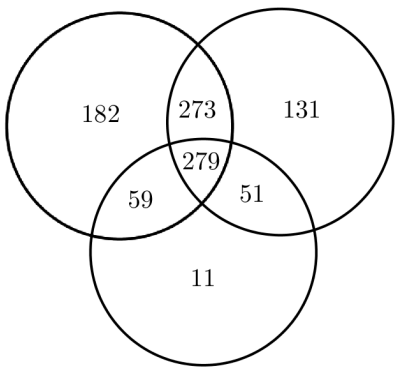
Hoàn toàn tương tự, ta tìm được tập $AC - ABC$ có 59 sinh vật (tập hợp này trên Hình 1 được gạch bằng những đường kẻ dọc), còn tập $BC - ABC$ bao gồm 51 sinh vật (tập hợp này được gạch bằng

[1]Kurdel: quái vật hư cấu khổng lồ trong một số tác phẩm của nhà văn nổi tiếng người Ba Lan Stanisław Lem - (ND).

những đường kẻ chéo).

Bây giờ đã dễ dàng tìm được số phần tử của phần của tập A mà không thuộc $B + C$. Để làm điều này, ta cần lấy 811 (số lượng phần tử của A) trừ đi 570 (số lượng phần tử của AB) và trừ đi thêm 59 (số lượng phần tử của $AC - ABC$). Còn lại 182 sinh vật có một mắt nhưng không có rắn trên đầu và không có đuôi cá. Hoàn toàn tương tự, số lượng phần tử của tập $B - (A + C)$ bằng 131, còn số lượng phần tử của $C - (A + B)$ bằng 11. Các kết quả tính toán được biểu diễn trên Hình 2.

Bây giờ ta sẽ tính, có bao nhiêu thành viên không phải một mắt, không có tóc rắn và không có đuôi cá, tức là số phần tử của tập hợp $I - A - B - C$. Bởi vì mỗi tập hợp trên Hình 2 không giao nhau, nên để xác định điều trên đơn giản là lấy 1000 trừ đi tổng $297+273+59+51+182+131+11$. Nhưng tổng này bằng 1004, do đó tập hợp $I - A - B - C$ có -4 sinh vật.

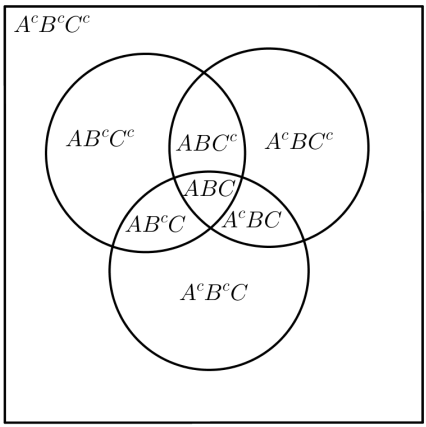


Hình 2: Tính số phần tử.

Nhưng Ion thân mến, cậu cũng phải tự thừa nhận rằng, thậm chí trên hành tinh của những truyện thần thoại cũng không có một tập hợp nào có thể có số phần tử âm. Ngay cả đối với cậu, những điều tưởng tượng này khó tin quá mức."

★ Chúng ta sẽ để Ion Lặng Lẽ giải thích với giáo sư Tarantog (chúng ta sẽ sớm gặp lại nhân vật này) và sẽ làm vài ghi chú. Ta

phân tập hợp I thành 8 tập con và tìm số lượng phần tử của chúng.



Hình 3: Biểu đồ 3 tập hợp.

Ý nghĩa của việc phần chia này nằm ở chỗ, các tập con nhận được từng đôi một không giao nhau. Nhưng việc phân chia này cũng có thể được thực hiện bằng cách khác. Ta đã biết $I = A + A^c = B + B^c = C + C^c$, do đó

$$\begin{aligned} &I = (A + A^c)(B + B^c)(C + C^c) \\ &= ABC+ABC^c+AB^cC+AB^cC^c+A^cBC+A^cBC^c+A^cB^cC+A^cB^cC^c. \end{aligned}$$

Ta nhận được cách phân chia tập I thành 8 tập con. Đây cũng chính là các tập hợp con mà giáo sư Tarantog đã nhận được trước đó (Hình 3). Từ công thức này ta suy ra

$$\begin{aligned} N(A^cB^cC^c) = N(I) &- N(ABC) - N(ABC^c) - N(AB^cC) \\ &- N(AB^cC^c) - N(A^cBC) - N(A^cBC^c) - N(A^cB^cC), \end{aligned}$$

trong đó $N(D)$ là ký hiệu số lượng phần tử của tập hợp D.

Công thức này có thể được chuyển thành dạng không chứa các phần bù A^c, B^c, C^c của các tập A, B, C. Để làm điều này, ta thay C^c bằng $I - C$. Ta nhận được $ABC^c = AB(I - C) = AB - ABC$, do đó $N(ABC^c) = N(AB) - N(ABC)$, $N(AB^cC^c) = N(AB^c) - N(AB^cC)$, v.v. Rồi ta thay B^c bởi $I - B$, rồi thay A^c bởi $I - A$. Cuối cùng ta nhận được đẳng thức:

$$N(A^cB^cC^c) = N(I) - N(A) - N(B) - N(C) + N(AB) + N(AC) + N(BC) - N(ABC) \quad (5.1)$$

Công thức trên được gọi là *công thức bao hàm và loại trừ* và cho phép giải nhiều bài toán có dạng tương tự như bài toán được xét ở trên. Ví dụ, với công thức này, Tarantog có thể lập tức tính được $N(A'B'C') = 1000 - 811 - 752 - 418 + 570 + 356 + 348 - 297 = -4$. ★

Thêm một bài toán khác liên quan đến việc đếm số lượng các phần tử của các tập hữu hạn. Bài toán này thuộc về nhà văn thiếu nhi nổi tiếng Lewis Carroll, tác giả của truyện "Alice ở xứ sở thần tiên". Bạn có biết, Lewis Carroll chính là bút danh của nhà toán học Dodgson. Trong một truyện của Carroll có bài toán sau:

Trong một trận chiến khốc liệt, có 70 *trong số* 100 *tên cướp biển bị mất một mắt,* 75 *- mất một tai,* 80 *- mất một tay,* 85 *- mất một chân. Hỏi số tên cướp biển bị mất cả mắt, tai, tay, chân ít nhất là bao nhiêu?*

Ta ký hiệu A là tập những tên cướp biển mất một mắt, B là tập những tên cướp biển mất một tai, C là tập những tên cướp biển mất một tay, D là tập những tên cướp biển mất một chân. Trong bài toán cần đánh giá số lượng của tập hợp $ABCD$. Rõ ràng, tập hợp bao trùm I có thể biểu diễn ở dạng tổng của tập $ABCD$ này với tập hợp các

tên cướp biển còn giữ lại được hoặc cả hai mắt, hoặc cả hai tai, hoặc cả hai tay, hoặc cả hai chân. Do đó, $I = A^c + B^c + C^c + D^c + ABCD$.

Từ đó suy ra, rằng số phần tử của tập I không thể nhiều hơn tổng số phần tử của các tập A^c, B^c, C^c, D^c và $ABCD$ (dấu bằng xảy ra nếu các tập A^c, B^c, C^c, D^c không giao nhau từng đôi một). Mà số lượng phần tử của tập A^c bằng 30, của tập B^c là 25, của tập C^c là 20 và của tập D là 15. Và vì số lượng của tập bao trùm bằng 100, nên ta có

$$100 \leq 30 + 25 + 20 + 15 + N(ABCD).$$

Suy ra

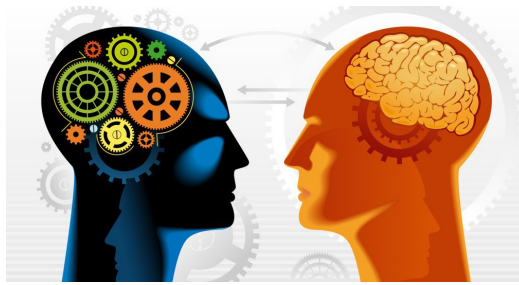
$$N(ABCD) \geq 100 - 30 - 25 - 20 - 15 = 10.$$

Như vậy, không ít hơn 10 tên cướp biển mất cả mắt, tai, tay và chân.

Đinh lý Bayes - Nền tảng của học máy thống kê

Đặng Trần Thái và Hồ Tú Bảo

GS. Hồ Tú Bảo (`http://www.jaist.ac.jp/~bao/`) là giám đốc Trung tâm Học máy và Phân tích dữ liệu (Machine Learning and Data Mining Ho Laboratory) tại Viện Khoa học và Công nghệ Cao Nhật Bản (Japan Advanced Institute of Science and Technology). Đặng Trần Thái là nghiên cứu sinh của GS. Hồ Tú Bảo. Bài viết dưới đây là do GS. Hồ Tú Bảo gửi đến theo lời mời của Sputnik Education.



Rất nhiều định lý là nền tảng của những lĩnh vực toán học khác nhau và có ảnh hưởng sâu sắc tới sự phát triển của khoa học hoặc ứng dụng trong đời sống. Chẳng hạn đó là định lý Pythagoras (Pi-ta-go) hay định lý Thales (Ta-let) trong hình học sơ cấp, định lý cơ bản của giải tích về mối quan hệ giữa phép tính vi phân và tích phân, định lý về cân bằng Nash trong kinh tế, định lý bất toàn của Godel trong khoa học, các định lý Fermat trong số học... Trong lý thuyết xác suất và thống kê, có thể kể đến định lý giới hạn trung tâm và định lý Bayes (đọc là Beiz). Ngày nay, khi con người đang ở thời kỳ

chuyển đổi số và công nghệ số, định lý Bayes càng có vai trò quan trọng, nhất là trong lĩnh vực học máy thống kê.

Sơ lược về học máy thống kê

Con người đang chứng kiến những đột phá của trí tuệ nhân tạo (AI) với các hệ thống thông minh, như hệ AlphaGo thắng tâm phục khẩu phục huyền thoại cờ vây Lee Sedol, các hệ thống dịch tự động hay nhận dạng tiếng nói đang được dùng rất phổ biến, hay các hệ hỗ trợ chẩn đoán và điều trị bệnh... Ngành học máy (Sputnik Newsletter Số 4-2017) phát triển các phương pháp nhằm làm cho máy tính có một số khả năng học tập của con người. Cách tạo ra các khả năng này được thực hiện chủ yếu qua phân tích các bảng dữ liệu để tìm ra các tri thức mới, các giả thuyết, các quyết định hành động (như các nước đi tiếp theo trên bàn cờ, như trong nhiều cách dịch một câu thì cách nào xác đáng hơn, hay một người có triệu chứng của một bệnh ung thư nhưng có bị ung thư đó thật không...).

Các nghiên cứu về học máy đến nay đã có lịch sử khoảng 60 năm, khởi đầu từ các thuật toán trực cảm (heuristic algorithms) như lời giải cho một số bài toán học máy tiêu biểu. Các dữ liệu khai thác ở thời gian đầu chủ yếu là các loại dữ liệu biểu diễn và lưu giữ được trong các bảng biểu có cấu trúc, như các bảng Excel (tuy là cấu trúc của các bảng lưu trữ dữ liệu, các dữ liệu loại này được quy ước gọi là 'dữ liệu có cấu trúc'). Chú trọng đến các mô hình thuật toán và dựa vào sự tiến bộ nhanh chóng của khoa học máy tính, ngành học máy đã dần trở thành một nhánh quan trọng của trí tuệ nhân tạo.

Những tiến bộ của ngành học máy diễn ra thật sự ngoạn mục

trong khoảng hai thập kỷ vừa qua, khi nhu cầu phân tích các tập dữ liệu lớn và rất lớn tăng lên, cũng như khi cần phân tích các kiểu dữ liệu phức tạp không biểu diễn và lưu giữ được trong các bảng biểu có cấu trúc (gọi là 'dữ liệu không có cấu trúc'). Đó là các dãy DNA trong sinh học phân tử, các công thức hoá học, các văn bản, các trang web trên internet...

Điều đáng kể là ngành học máy trong hai thập kỷ qua đã phát triển nhờ sự kết hợp thống kê toán học. Ngành học máy, vốn chú trọng nhiều về các mô hình thuật toán, đã học hỏi nhiều từ nền tảng toán thống kê, vốn chú trọng nhiều về các mô hình dữ liệu với các lý thuyết suy diễn. Sự kết hợp với toán học thống kê đã thay đổi ngành học máy, với nội dung và diện mạo mới: học máy thống kê (statistical machine learning).

Có thể nói phần lớn những đột phá vừa qua của lĩnh vực trí tuệ nhân tạo đều dựa trên những tiến bộ ngoạn mục của học máy thống kê. Trong bài báo năm 2015 trên tạp chí Science, hai nhà nghiên cứu uy tín của ngành học máy, M.I. Jordan và T. Mitchell đã chỉ ra, "Rất nhiều người làm các hệ AI ngày nay nhận ra rằng, trong rất nhiều ứng dụng việc huấn luyện một hệ thống từ các thí dụ đầu vào-đầu ra để có quyết định hành động là dễ hơn rất nhiều việc soạn sẵn các quyết định mong muốn cho mọi tình huống có thể xảy ra". Việc "soạn sẵn các quyết định mong muốn cho mọi tình huống" chính là việc thu thập và biểu diễn tri thức con người trên máy tính, là cách con người đã làm các hệ chuyện gia (expert systems), vốn là việc rất khó khăn của trí tuệ nhân tạo, còn dùng "các thí dụ đầu vào-đầu ra" để huấn luyện các hệ thống thông minh, chính là cách làm của học máy.

Đáng nói là với nhiều phương pháp học máy, để huấn luyện được các hệ thống "đủ" thông minh, điều kiện cần là các tập dữ liệu phải

rất lớn. Trong thí dụ về AlphaGo kể trên, người ta phải nhập rất nhiều trận đấu cờ vây của các cao thủ để máy phân tích và học. Số lượng này lớn đến mức AlphaGo có được kinh nghiệm như một cao thủ đã chơi cờ vây suốt 80 năm.

Để máy dịch được tốt tiếng Anh ra tiếng Việt, cần đưa cho máy nhiều triệu cặp câu song ngữ Anh-Việt. Để chẩn đoán được một bệnh ung thư, cần đưa cho máy bệnh án điện tử của rất rất nhiều bệnh nhân mắc và không mắc bệnh ung thư đó.

Những kết quả kỳ diệu do học máy thống kê đem đến giống như những bất ngờ của những trò ảo thuật. Tuy bí ẩn nhưng đằng sau chúng đều có những nguyên lý nền tảng. Một nguyên lý nền tảng đề cập trong bài viết này là định lý Bayes nổi tiếng, tìm ra bởi hai học giả lỗi lạc ở thế kỉ thứ 18, Thomas Bayes (1702-1761) và Simon Laplace (1749-1827).

Hiểu biết của ta về một điều gì đó hay niềm tin của ta về một chân lý có thể thay đổi hoặc được điều chỉnh (cập nhật) khi những sự kiện liên quan xảy ra. Nói một cách nôm na, định lý Bayes, về bản chất, cho ta biết cách cập nhật những hiểu biết ban đầu của ta khi xuất hiện những sự kiện liên quan.

Định lý Bayes là gì?

Để hiểu một cách giản dị về định lý Bayes, ta minh hoạ bằng thí dụ sau:

Một người đi xét nghiệm ung thư và nhận được kết quả dương tính, ký hiệu là (+). Kiến thức chung nói với ta rằng người có xét nghiệm dương tính là hầu như chắc chắn mắc bệnh ung thư. Tuy nhiên, thống

kê từ thực tế còn cho ta biết thêm:

(1) Trong những người bị ung thư, chỉ có 98% có kết quả xét nghiệm dương tính (+);

(2) Trong những người không bị ung thư, chỉ có 97% có kết quả xét nghiệm âm tính (-); và

(3) Trong 1000 người có 8 người mắc bệnh ung thư, tức xác suất để một người bị ung thư là 0.008.

Liệu người này có bị ung thư hay không?

Để trả lời câu hỏi này ta sẽ dùng định lý Bayes. Gọi điều ta muốn khẳng định là giả thuyết H, thường được xem xét cùng với các giả thuyết khác cũng có thể xảy ra, và E là sự kiện liên quan đến H, thường được xác định từ dữ liệu. Định lý Bayes phát biểu như sau

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}$$

trong đó:

- $P(H)$ là xác suất của giả thuyết H trước khi biết E, gọi là *xác suất tiên nghiệm*, hoặc đơn giản là *tiên nghiệm* (prior), tức ước lượng của ta về khả năng xảy ra H khi không biết gì về việc E có xảy ra hay không.

- $P(E|H)$ là xác suất quan sát thấy E với điều kiện có H, gọi là *xác suất khả dĩ*, hoặc đơn giản là *khả dĩ* (likelihood). Khả dĩ là một hàm số của sự kiện E thể hiện sự tương đồng của E với H.

- $P(H|E)$ là xác suất của H sau khi biết có E, gọi là *xác suất hậu nghiệm*, hoặc đơn giản là *hậu nghiệm* (posterior). Hậu nghiệm là một hàm số của H thể hiện hiểu biết của ta về H khi biết E.

- $P(E)$ là xác suất của sự kiện E, còn gọi là *khả dĩ biên* (marginal

likelihood).

Điểm cốt lõi của định lý Bayes là việc định lý này chỉ ra mối quan hệ giữa ba đại lượng tiên nghiệm, hậu nghiệm và khả dĩ. Vì khả dĩ biên không phụ thuộc vào bất kỳ giả thuyết H nào, nên khi so sánh khả năng xảy ra các giả thuyết ta có thể bỏ qua mẫu số trong công thức của định lý Bayes và chỉ dùng phần tử số. Khi này định lý Bayes cho ta phương trình quan trọng sau về sự tỷ lệ thuận giữa hậu nghiệm với tích của tiên nghiệm và khả dĩ.

$$\textit{posterior} \sim \textit{prior} \times \textit{likelihood}$$

Quay lại bài toán về dự đoán ung thư kể trên. Ở đây giả thuyết H chính là việc người bệnh bị ung thư, viết tắt là *cancer*, và giả thuyết người bệnh không bị ung thư sẽ là *notcancer*. Sự kiện E chính là việc người bệnh có xét nghiệm dương tính (+). Ta cần tính các xác suất và để so sánh chúng với nhau. Các điều kiện của bài toán được viết theo ngôn ngữ xác suất như sau:

1. $P(+|cancer) = 0{,}98$
2. $P(-|notcancer) = 0{,}97$
3. $P(cancer) = 0{,}008$

Hai giá trị xác suất cần so sánh $P(cancer|+)$ và $P(notcancer|+)$ được tính theo định lý Bayes như sau:

$$P(+|notcancer) = 1 - P(-|notcancer) = 0{,}03$$

$$P(notcancer) = 1 - P(cancer) = 0{,}992$$

$$P(notcancer|+) = \frac{P(+|notcancer)P(notcancer)}{P(+)}$$

$$P(cancer|+) = \frac{P(+|cancer)P(cancer)}{P(+)}$$

$$\frac{P(notcancer|+)}{P(cancer|+)} = \frac{P(+|notcancer)P(notcancer)}{P(+|cancer)P(cancer)} =$$
$$= \frac{0{,}03 \times 0{,}992}{0{,}98 \times 0{,}008} \approx 3{,}7.$$

Như vậy so sánh hai xác suất ta thấy rằng bệnh nhân này dù có xét nghiệm dương tính nhưng khả năng không bị ung thư lớn hơn gần gần bốn lần khả năng bị ung thư.

Ví dụ này đã minh hoạ điểm cốt lõi của định lý Bayes. Hiểu biết chung của ta là người mắc ung thư hầu hết có xét nghiệm dương tính, qua thống kê có đến 98%, và do vậy một người có xét nghiệm dương tính được coi hầu như chắc chắn mắc ung thư. Nhưng khi quan sát được trong những người không bị ung thư chỉ có 97% có xét nghiệm âm tính, và qua tính toán theo định lý Bayes, ta có thể thay đổi suy nghĩ ban đầu và đưa ra kết luận được khẳng định từ dữ liệu.

Ví dụ ta nói trên, khái quát hơn, là một minh họa của *suy diễn thống kê* (statistical inference). Suy diễn thống kê được hiểu là quá trình rút ra tính chất từ một phân bố xác suất của một quần thể (population) với dữ liệu mẫu của quần thể đó. Hai loại suy diễn thống kê cơ bản là suy diễn theo tần suất (frequentist inference) và suy diễn theo Bayes (Bayesian inference), tương ứng với hai trường phái xác suất. Tiêu biểu cho suy diễn theo tần xuất là các lý thuyết ước lượng và kiểm định giả thuyết thống kê.

Suy diễn theo Bayes là việc cập nhật xác suất của các giả thuyết khi có thêm dữ liệu, tức biết thêm về các sự kiện, các chứng cớ liên quan đến giả thuyết. Đây là cả một hệ thống lý thuyết phức tạp, và ta chỉ giới thiệu qua một vài điều cơ bản trong bài báo này.

Giả sử chúng ta có một số giả thuyết cần so sánh và lựa chọn $H_1, H_2, \ldots$ cùng liên quan đến sự kiện E và thuộc một không gian

các giả thuyết $\mathcal{H}$ nào đó. Một nguyên tắc cơ bản để chọn xem giả thuyết nào phù hợp hơn cả là chọn *giả thuyết hậu nghiệm cực đại* H_{MAP} (maximum a posterior hypothesis), tức chọn H_{MAP} với

$$H_{MAP} = argmax_{H \in \mathcal{H}} P(H|E)$$

Ở đây $y = argmax_x f(x)$ có nghĩa là $f(x) \leq f(y)$ với mọi x, tức là $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = y$.

Trong trường hợp ta không phân biệt xác suất tiên nghiệm của các giả thuyết, tức $P(H_i) = P(H_j)$ đối với mọi i, j, ta có một nguyên tắc đơn giản hơn, là *giả thuyết khả dĩ cực đại ML* (maximum likelihood)

$$H_{MAP} = argmax_{H \in \mathcal{H}} P(E|H)$$

Suy diễn Bayes ngây thơ (Naive Bayesian inference) là phương pháp suy diễn ra xác suất khả dĩ khi giả định các biến mô tả dữ liệu là độc lập với nhau. Sở dĩ vậy vì sự kiện E thường được quan sát từ các đối tượng mô tả bởi các vec-tơ trong một không gian hữu hạn chiều, thí dụ là $\mathbb{R}$. Giả sử $E = (X_1, \ldots, X_p) \in \mathbb{R}^p$. Hầu như không thể tính được xác suất khả dĩ trong trường hợp này nếu các biến $X_1, \ldots, x_p$ phụ thuộc vào nhau. Nhưng khi giả định các biến này độc lập ta có công thức

$$P(E|H) = P(X_1|H) \times \ldots \times P(X_p|H),$$

và các giá trị $P(X_i|H)$ có thể dễ dàng ước lượng từ dữ liệu.

Giả định về tính độc lập của các biến cho ta thực hiện được việc tính toán. Tuy nhiên trong thực tế không phải lúc nào các biến cũng độc lập với nhau. Để khắc phục hạn chế này, giả định trên được nới

lỏng một chút, bằng việc cho phép các biến có thể phụ thuộc vào nhau trong những tập con nhất định của các biến.

Ý tưởng này dẫn đến việc phát triển các mô hình mạng Bayes (Bayesian networks), và chúng dần được mở rộng thành một lý thuyết tổng quát, hiện đang có vai trò trung tâm trong học máy thống kê: các *mô hình đồ thị xác suất* (probability graphical models). Định lý Bayes đóng vai trò nền tảng trong lý thuyết quan trọng này.

Định lý Bayes ra đời và phát triển như thế nào?

Lịch sử phát triển của định lý Bayes là một câu chuyện thú vị với nhiều thăng trầm. Quá trình ấy được tóm lược trong một cuốn sách mới xuất bản gần đây, "The theory that would not die: How Bayes's rule cracked the enigma code, hunted down Russian submarines, emerged triumphant from two centuries of controversy", tạm dịch "Định lý Bayes - định lý không bao giờ chết: Quy tắc Bayes đã giúp giải mã enigma, săn tàu ngầm Nga, và trỗi dậy sau hai thế kỉ tranh cãi như thế nào?" (McGrayne et al., 2011).

Định lý Bayes được tìm ra đầu tiên bởi nhà toán học người Anh Thomas Bayes. Sau đó, độc lập với Bayes, định lý này cũng được nhà toán học người Pháp Pierre-Simon Laplace tìm ra. Tuy nhiên, khác với Bayes, Laplace đã dành phần lớn cuộc đời ông để xây dựng cơ sở lý thuyết và phát triển định lý này. Công thức tổng quát về suy diễn Bayes mà Laplace đưa ra chính là nền tảng cho các mô hình học máy thống kê sau này.

Trong thời kì đầu, định lý Bayes không được chấp nhận bởi các nhà lý thuyết vì họ cho rằng khoa học không thể chấp nhận bất kì

một thứ gì mang tính chủ quan hoặc không xác thực, trong khi lý thuyết xác suất cố gắng định lượng khả năng xảy ra của một sự kiện, cái vốn dĩ bất định và phụ thuộc vào niềm tin cũng như nhận thức của con người. Thậm chí, George Chrystal - một nhà toán học người Scotland từng tuyên bố rằng quy tắc Laplace đang chết và nó nên bị chôn vùi.

Mặc dù bị thất sủng trong giới hàn lâm nhưng định lý Bayes tỏ ra ưu việt trong việc giải các bài toán dự đoán trong thực tế. Một trong những lĩnh vực mà định lý này được ứng dụng khá nhiều là quân sự. Joseph Bertrand (1822-1900) đã thuyết phục rằng sử dụng định lý này là cách duy nhất giúp các sĩ quan pháo binh giải quyết các vấn đề trong chiến đấu như xác định vị trí quân địch hay hướng gió . . . Cuốn sách của Josheph đã được sử dụng rộng rãi trong lực lượng quân đội của nhiều nước. Trong thế chiến thứ hai, Alan Turing (1912-1954) và Barnard Koopman (1900-1981) đã sử dụng hiệu quả quy tắc của Laplace trong việc giải mã các tin nhắn từ máy enigma của quân Đức và trong việc xác định vị trí các tàu ngầm U-Boats. Bên cạnh lĩnh vực quân sự, định lý Bayes cũng hữu dụng để giải quyết các vấn đề trong thiên văn, nông nghiệp, bảo hiểm, kinh tế và đầu tư. . .

Việc sử dụng hiệu quả định lý Bayes để giải quyết các bài toán trong thực tế dường như chỉ giúp nó không bị chìm vào quên lãng nhưng chưa thể giúp nó có chỗ đứng vững chắc trong giới học thuật. Do đó, trong nhiều năm, nhiều nhà thống kê đã nỗ lực trong công cuộc xây dựng nền tảng lý thuyết cho định lý này.

Ba nhà khoa học Émile Borel (1871-1956), Frank Ramsey (1903-1930), và Bruno de Finetti (1906-1985) đều đề xuất ý tưởng rằng tri thức bản chất mang tính chủ quan và chúng ta có thể định lượng nó. Nó giống như một ván cá cược mà lượng tiền chúng ta cá cược

cho thấy mức độ chúng ta tin vào quyết định của mình. Có thể nói ý tưởng này ra đời giống như một chiếc búa đập tan bức tường ngăn cách giữa lý thuyết xác suất và toán học lý thuyết nói chung. R. A. Fisher (1890-1962) và Harold Jeffreys (1891-1989) là hai nhà khoa học tiên phong trong việc xây dựng các phương pháp suy diễn thống kê như lý thuyết lấy mẫu (sampling theory), kiểm định ý nghĩa thống kê (test of significance), ANOVA (Analysis of Variance). Các phương pháp này được viết trong hai cuốn sách "Statistical methods for re-seach workers" (Fisher et al., 1992) và "The theory of probability" (Jeffreys, 1998). Năm 1950, I.J. Good xuất bản cuốn sách "Probability and the Weighing of Evidence" (Good et al., 1950). Cuốn sách này trình bày các kĩ thuật thống kê dựa trên định lý Bayes một cách logic và mạch lạc. Savage cũng xuất bản cuốn "Foundations of Statistics" (Savage et al., 1972) cho thấy rằng định lý này không những chỉ được dùng trong các cơ chế suy diễn mà còn có thể được dùng trong việc đưa ra quyết định.

Ngày nay con người có nhu cầu lớn trong việc tìm kiếm tri thức mới từ dữ liệu thu thập được. Đây là thiên thời cho sự trỗi dậy mạnh mẽ của lĩnh vực học máy thống kê và khai phá dữ liệu. Các mô hình suy diễn Baysian được sử dụng rộng rãi để tìm các tri thức ẩn từ dữ liệu quan sát do khả năng biểu diễn quan hệ giữa các biến và cơ chế suy diễn của nó. Tuy nhiên, khi mô hình các quá trình suy diễn phức tạp với nhiều tham số, chúng ta gặp phải khó khăn trong việc tối ưu hoá để tìm bộ tham số tốt nhất, thậm chí trong nhiều trường hợp chúng ta không thể giải được một cách thuần tuý bằng toán học lý thuyết. Do đó, để phá bỏ rào cản này, các thuật toán xấp xỉ lần lượt ra đời như Expectation Maximization (EM), Markov Chain Monte Carlo (MCMC)... Các thuật toán xấp xỉ này có thể được xem như đôi cánh

giúp các mô hình suy diễn Bayes tạo ra những bước tiến quan trọng.

Nguồn

1. McGrayne, Sharon Bertsch. The theory that would not die: how Bayes's rule cracked the enigma code, hunted down Russian submarines, & emerged triumphant from two centuries of controversy. Yale University Press, 2011.

2. Fisher, Ronald Aylmer. Statistical methods for research workers. Breakthroughs in Statistics. Springer New York, 1992. 66-70.

3. Jeffreys, Harold. The theory of probability. OUP Oxford, 1998.

4. Good, Irving John. Probability and the Weighing of Evidence, 1950.

5. Savage, Leonard J. The foundations of statistics. Courier Corporation, 1972.

6. Jordan, Michael, Mitchell, Tom. Machine Learning: Trends, perspectives, and prospects. Science, 349 (6245), 255–260, 2015.

Bất đẳng thức Schur và những bài toán có lời giải thú vị

Nguyễn Huy Trung

Mục **Bạn đọc viết** do TS. toán học Nguyễn Văn Minh, Đại học Ngoại thương, phụ trách. Bạn đọc có bài viết hay muốn chia sẻ với Sputnik Newsletter có thể gửi đến nguyenvanminh_math@ftu.edu.vn. Bài viết lần này là của tác giả Nguyễn Huy Trung, lớp Anh 10 – K52 - KTĐN FTU.

Trong bài viết này, tôi muốn bàn đến với các bạn về một bất đẳng thức đẹp, mạnh và có rất nhiều ứng dụng trong chứng minh các kết quả sơ cấp. Đó là bất đẳng thức Schur.

Bất đẳng thức có dạng phát biểu như sau:

Cho $a,\ b,\ c \geq 0$ và t là một số dương. Lúc đó đánh giá sau đây là đúng:

$$a^t (a-b)(a-c) + b^t (b-a)(b-c) + c^t (c-b)(c-a) \geq 0$$

Chứng minh khẳng định này không khó nhưng cũng khá thú vị.

Do $a,\ b,\ c$ có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát có thể giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$.

Lúc đó hiển nhiên $c^t (c-b)(c-a) \geq 0$

và $a^t (a-b)(a-c) + b^t (b-a)(b-c) =$

$= (a-b)\left(a^t (a-c) - b^t (b-c)\right) \geq 0$

vì $a^t \geq b^t \geq 0$ và $a - c \geq b - c \geq 0$.

Bất đẳng thức được chúng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b; c = 0$ và các bộ hoán vị tương ứng.

Trường hợp đặc biệt hay sử dụng nhất của Bất đẳng thức Schur là trường hợp $t = 1$, lúc đó ta có:

Với 3 số $a,\ b,\ c \geq 0$ thì

$$a\left(a-b\right)\left(a-c\right)+b\left(b-a\right)\left(b-c\right)+c\left(c-b\right)\left(c-a\right)\geq 0$$

Khai triển và rút gọn, ta được:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq a^2\left(b+c\right)+b^2\left(a+c\right)+c^2\left(a+b\right)$$

Bất đẳng thức bên trên hoàn toàn tương đương với dạng sau, gọi là dạng phân thức của BĐT Schur:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\geq 2\left(ab+bc+ca\right)$$

Một trường hợp đặc biệt khác cũng hay dùng, đó là $t = 2$. Bất đẳng thức

$$a^2\left(a-b\right)\left(a-c\right)+b^2\left(b-a\right)\left(b-c\right)+c^2\left(c-b\right)\left(c-a\right)\geq 0$$

tương đương với

$$a^4+b^4+c^4+abc\left(a+b+c\right)\geq a^3\left(b+c\right)+b^3\left(a+c\right)+c^3\left(a+b\right)$$

Áp dụng AM-GM (BĐT trung bình công - trung bình nhân) ta có:

$$\begin{aligned}
&a^3\left(b+c\right)+b^3\left(a+c\right)+c^3\left(a+b\right)\\
&=ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)\\
&\geq 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2
\end{aligned}$$

Từ đó ta có một hệ quả khá đẹp mắt là

$$a^4+b^4+c^4+abc\,(a+b+c)\geq 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$$

Bây giờ chúng ta cùng tìm hiểu những ứng dụng của bất đẳng thức Schur. Một trong những ứng dụng nổi bật của nó là chứng minh nhiều kết quả sơ cấp hết sức ngắn gọn và đẹp mắt. Hãy thử xem xét bài toán mở đầu sau đây:

Bài toán 1: Cho $a,\ b,\ c\ >0$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b-c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)\leq (ab+bc+ca)\,abc$$

Lời giải:

Nhân cả 2 vế của BĐT với $a+b+c>0$, với chú ý

$$\begin{aligned}&(a+b-c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b+c)\\&=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\end{aligned}$$

ta cần:

$$\begin{aligned}&\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\right)\\&\leq (a+b+c)\,(ab+bc+ca)\,abc\end{aligned}$$

Theo AM-GM thì:

$$(a+b+c)\,(ab+bc+ca)\geq 9abc$$

Từ đó suy ra chỉ cần chứng minh được:

$$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\leq\frac{9a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Dễ dàng nhận ra rằng đây chính là BĐT Schur dạng phân thức. Ta có đpcm.

Nhận xét: Ở bài toán trên, điều quan trọng nhất là chúng ta phải phát hiện ra hằng đẳng thức

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c)$$
$$=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$$

Cũng sử dụng hằng đẳng thức này, bằng phương pháp phản chứng ta chứng minh được kết quả sau:

Bài toán 2: Với $a,\ b,\ c\ >0$ ta có:

$$\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+5bc}}+\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+5ca}}+\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+5ab}}\leq 1$$

Lời giải:

Giả sử rằng tồn tại $a,\ b,\ c\ >0$ sao cho

$$\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+5bc}}+\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+5ca}}+\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+5ab}}>1$$

Khi đó, đặt $x=\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+5bc}};\ y=\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+5ca}};\ z=\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+5ab}}$

thì dễ thấy $0<x,\ y,\ z<\frac{1}{2}$ và $\frac{bc}{a^2}=\frac{1-4x^2}{5x^2};\ \frac{ac}{b^2}=\frac{1-4y^2}{5y^2};\ \frac{ab}{c^2}=\frac{1-4z^2}{5z^2}$

Từ đó suy ra $\left(1-4x^2\right)\left(1-4y^2\right)\left(1-4z^2\right)=5^3x^2y^2z^2 \qquad (1)$

Do $0<x,\ y,\ z<\frac{1}{2}$ và $x+y+z>1$ nên dễ thấy $x;y;z$ là độ dài

3 cạnh của một tam giác. Từ đó

$$\begin{aligned}
&\text{VT}\,(1)\\
&< \left((x+y+z)^2-4x^2\right)\left((x+y+z)^2-4y^2\right)\left((x+y+z)^2-4z^2\right)\\
&= (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)(3x+y+z)(3y+z+x)(3z+x+y)\\
&\le (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).\frac{5^3(x+y+z)^3}{27}\\
&\le (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).\frac{5^3(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)}{9}\\
&= \frac{5^3}{9}\left[2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4\right]\left(x^2+y^2+z^2\right)
\end{aligned}$$

Theo BĐT Schur bậc 3 thì:

$$2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4 \le \frac{9x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

hay $\left[2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4\right]\left(x^2+y^2+z^2\right) \le 9x^2y^2z^2$

nên kết hợp với trên ta suy ra $5^3x^2y^2z^2 = \text{VP}\,(1) = \text{VT}\,(1) < 5^3x^2y^2z^2$

Điều mâu thuẫn này làm cho giả sử là sai, và như vậy bài toán được chứng minh. Nếu bạn đọc là người thích tìm tòi, khám phá, hãy thử giải bài toán sau đây. Cách làm hoàn toàn tương tự:

Bài toán 3: Với $a,\ b,\ c\ >0$ ta có:

$$\frac{a}{a+\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c}{c+\sqrt{c^2+3ab}} \le 1$$

Bây giờ chúng ta cùng đến với một kết quả đẹp mắt không kém, cùng với cách giải hết sức độc đáo. Bài toán này đã được đăng trên mathlinks.ro.

Bài toán 4: Chứng minh rằng với 3 số dương $a,\ b,\ c$ ta có:

$$a\sqrt{(a+2b)(a+2c)}+b\sqrt{(b+2c)(b+2a)}+c\sqrt{(c+2a)(c+2b)} \ge 3(ab+bc+ca)$$

Lời giải:

Mới nhìn qua, hẳn chúng ta đều nghĩ ngay đến BĐT Minkovski. Nhưng không; với BĐT Schur; chỉ cần thêm AM-GM là đủ.

Thật vậy, sử dụng AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} a\sqrt{(a+2b)(a+2c)} &= \frac{a(a+2b)(a+2c)}{\sqrt{(a+2b)(a+2c)}} \geq \frac{2a(a+2b)(a+2c)}{a+2b+a+2c} \\ &= \frac{2a(a+2b)(a+2c)}{2(a+b+c)} = \frac{a(a+2b)(a+2c)}{a+b+c} \end{aligned}$$

Thiết lập 2 BĐT tương tự rồi cộng từng vế của chúng lại, ta quy bài toán về chứng minh:

$$\begin{aligned} &a(a+2b)(a+2c)+b(b+2a)(b+2c)+c(c+2a)(c+2b) \\ &\geq 3(a+b+c)(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

Khai triển và rút gọn, ta được chính BĐT Schur bậc 3:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$$

Bài toán được giải hoàn toàn.

Không chỉ có ứng dụng trong việc chứng minh các kết quả đẹp mắt; Bất đẳng thức Schur cũng đã từng nhiều lần xuất hiện trong các cuộc thi toán quốc gia, khu vực và quốc tế. Sử dụng BĐT này, nhiều lời giải đơn giản đến bất ngờ đã được đưa ra, không cần đến các phép toán đạo hàm hay biến đổi cầu kì.

Đầu tiên, phải kể đến bài toán thi HSG của Nga năm 2000:

Bài toán 5: Cho $a,\ b,\ c\ >0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c \geq 2(ab+bc+ca)$$

Với BĐT Schur, thức ra bài toán này chỉ là một hệ quả đơn giản:

Chú ý rằng $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$ nên $a+b+c \geq \dfrac{9}{a+b+c} = \dfrac{9abc}{a+b+c}$

Cuối cùng $a^2+b^2+c^2+\dfrac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$

hiển nhiên đúng vì đây là dạng phân thức của BĐT Schur.

Trong kì thi chọn HSG Toán của Mỹ 2004, ta bắt gặp bài toán sau đây.

Bài toán 6: Chứng minh rằng với $a \geq b \geq c > 0$, bất đẳng thức sau đây là đúng:

$$2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2 \geq a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$$

Lời giải:

Ý tưởng của ta là đưa bài toán từ dạng không đối xứng về dạng đối xứng. Muốn như thế, với chú ý b là số nằm giữa a và c; ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2 &= \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right) \\ &\geq \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\end{aligned}$$

Từ đó: $2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh được

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2 \geq a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$$

Khai triển và rút gọn, BĐT này tương đương với

$$a+b+c+3\sqrt[3]{abc} \geq 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$

Thật vậy, đặt $\sqrt[6]{a}=x;\ \sqrt[6]{b}=y;\ \sqrt[6]{c}=z$; vẫn với sự kết hợp giữa Schur và AM-GM, ta được:

$$\begin{aligned} a+b+c+3\sqrt[3]{abc} &= x^6+y^6+z^6+3x^2y^2z^2 \\ &\geq x^2y^2\left(x^2+y^2\right)+y^2z^2\left(y^2+z^2\right)+z^2x^2\left(z^2+x^2\right) \\ &\geq 2\left(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\right) \\ &= 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right) \end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Bài toán tiếp theo xuất hiện trong kì thi China TST 2008.

Bài toán 7: Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}>2.\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}$$

Lời giải:

Đặt $\frac{ab}{c}=z^2;\frac{bc}{a}=x^2;\frac{ca}{b}=y^2$

Ta có: $a=yz;b=xz;c=xy$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$x^2+y^2+z^2>2.\sqrt[3]{x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3}$$

Lập phương 2 vế, ta viết lại yêu cầu thành:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^3>8(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)$$

Hay

$$x^6+y^6+z^6+3\sum x^2y^2\left(x^2+y^2\right)+6x^2y^2z^2>8(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3) \qquad (2)$$

Điều này hiển nhiên bởi vì

$$x^6+y^6+z^6+6x^2y^2z^2>x^6+y^6+z^6+3x^2y^2z^2\geq\sum x^2y^2\left(x^2+y^2\right)$$

theo BĐT Schur nên suy ra VT $(2) > 4\sum x^2y^2\left(x^2+y^2\right) \geq 8\sum x^3y^3$, theo AM- GM.

Tất nhiên là bài toán này không có dấu bằng.

Để kết thúc bài viết, xin mời các bạn cùng thử sức với 2 bài toán sau đây, cũng rất đẹp và có nhiều ý hay:

Bài toán 8: *(VMO 2015)* Cho $a,\ b,\ c > 0$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}&3\left(a^2+b^2+c^2\right)\\&\geq (a+b+c)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\\&\geq (a+b+c)^2\end{aligned}$$

Bài toán 9: *(IMO Shortlist 2011)* Cho các số thực $a,\ b,\ c > 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = 3$ và $min\left\{a+b; b+c; c+a\right\} > \sqrt{2}$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(a+b-c)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2} \geq \frac{3}{(abc)^2}$$

Học ngoại ngữ như thế nào?

Sputnik Education

Có lẽ không còn ai nghi ngờ về tầm quan trọng của ngoại ngữ trong thế giới toàn cầu hoá ngày nay. Sputnik Education cũng đã có một bài viết chi tiết ở đây về các ích lợi của việc học ngoại ngữ.

Tuy nhiên, phần lớn người Việt Nam hiện này vẫn còn bị "mù ngoại ngữ". Trong khi một người dân trung bình ở Thuỵ Sĩ nói thạo 3 thứ tiếng, thì theo một khảo sát gần đây, phần lớn các giáo viên dạy tiếng Anh ở Việt Nam cũng chưa "đạt trình độ trùng bình" về tiếng Anh. Phần lớn sách dịch từ tiếng nước ngoài ở Việt Nam cũng bị dịch sai nhiều vô kể.

Làm sao để cải thiện tình hình trên, để mỗi người chúng ta sẽ trở thành một "công dân toàn cầu" nói thạo ít nhất 1-2 ngoại ngữ? Mấu chốt nằm ở phương pháp học!

Nhằm góp phần "xoá nạn mù chữ" ngoại ngữ cho Việt Nam, chúng tôi xin chia sẻ với các bạn ***cách học của Sputnik, hiệu quả mà vui thích***, dưới dạng một danh sách những điều cần ghi nhớ và làm theo. Nó được đúc kết từ kinh nghiệm của bản thân những cộng tác viên "polyglot" của Sputnik nói thạo 3-4 thứ tiếng nước ngoài, cùng với sự tham khảo nhiều tài liệu quốc tế.

1. Không có tiếng khó, mà chỉ có tiếng chưa quen. Tiếng Anh có khó không? Nhìn đứa trẻ 5 tuổi ở Anh nói vèo vèo thì suy ra là chẳng hề khó. Các thứ tiếng khác cũng vậy. Nếu ta chưa nói được, hay chưa nói thạo, thì không phải vì nó khó, mà vì ta chưa đủ quen, chưa tiếp xúc đủ nhiều. Muốn biết tiếng gì, hãy tạo ra cho mình môi

Một cảnh trong loạt phim học ngoại ngữ rất hài hước nhan đề Extra. Trong ảnh là phiên bản để học tiếng Tây Ban Nha. Có thể xem trên youtube cả phiên bản để học tiếng Anh (có cả phụ đề tiếng Việt).

trường để tiếp xúc liên tục với tiếng đó, thì sẽ quen dần, ngấm dần rồi nói được, tương tự như đứa trẻ vậy. Hãy coi tiếng ta muốn biết là tiếng của ta, yêu thích nó như yêu thích tiếng mẹ đẻ (thay vì chỉ coi nó là ngoại ngữ xa lạ) thì sẽ mau quen.

2. Học kiểu tự động, gần mặt ắt sẽ gần lòng. Vẫn theo ý phía trên, muốn học tốt thứ tiếng nào thì cần tự tạo ra cho mình một môi trường xung quanh đầy tiếng đó. Ví dụ như radio, TV, âm nhạc (bằng tiếng đó) đập vào tai ta, các từ vựng dán to khắp nơi và báo chí (bằng tiếng đó) đập vào mắt ta, bạn bè nói/viết tiếng đó (kể cả "bạn ảo"), v.v. Trong một môi trường như vậy, ta có thể tranh thủ học tiếng một cách tự động, tức là học cả trong những lúc đang làm việc khác, không cần tập trung. Như là đứa trẻ vậy, nó học tiếng trong khi

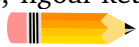
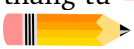
làm các việc của nó, chẳng cần nghĩ là đang học tiếng.

3. Đừng lo sớm hay muộn, lúc nào học cũng hợp. Một khi ta đã rất thích học một thứ tiếng nào đó, thì chẳng có lúc nào là sớm quá hay muộn quá để mà học nó. Chẳng ai "quá bận" đến mức không thể học được ngoại ngữ nào, ít ra là theo phương pháp học tự động. Cũng chẳng ai là "quá già" để học ngoại ngữ. (Ông Friedrich Gauss đến năm 60 tuổi mới bắt đầu học tiếng Nga, một thời gian sau đã đọc được tiểu thuyết tiếng Nga). Và cũng chẳng có trẻ em nào "quá non" để bắt đầu học thêm tiếng. Môi trường đa ngôn ngữ khiến người ta nói được nhiều thứ tiếng ngay từ khi còn nhỏ, và không hiếm trẻ em mới 6 tuổi đã nói được 3-4 thứ tiếng một cách tự nhiên.

4. Đều đặn hàng ngày tốt hơn "no dồn đói góp". Tương tự như là thể dục hàng ngày thì hiệu quả hơn là dăm bữa nửa tháng mới tập dồn một lần. Cái gì lặp đi lặp lại hàng ngày thì não của ta ghi nhớ sâu dần, còn cái gì mới ghi hờ mà lâu không được nhắc đến thì nó coi là không quan trọng, xóa đi khỏi bộ nhớ, thế là mất công học lại từ đầu. Vậy nên cần học tiếng đều đặn mỗi ngày một ít. Nếu thiếu thời gian vẫn có thể tận dụng cách học tự động như trên. Những gì đã ghi đủ sâu, đã liên kết với đủ nhiều thứ khác, thì sẽ lâu quên, nhưng cũng cần thỉnh thoảng được ôn lại không cũng sẽ lu mờ dần. Để duy trì những thứ tiếng đã thạo thì cần thỉnh thoảng đọc sách, giao tiếp, v.v bằng tiếng đó.

5. Bắt chước người nói sõi, tránh nghe người nói ngọng. Phần lớn việc học ngoại ngữ là dựa trên bắt chước, từ câu nói cho tới phát âm, ngữ điệu. Nhưng nếu ta bắt chước phải người nói ngọng, nói sai, thì cái ngọng cái sai đó có thể bám theo ta cả đời, sửa rất khó, thà đừng học còn hơn. Muốn nói sõi thì phải bắt chước người nói sõi. Nhưng ở Việt Nam có mấy ai nói thật sõi tiếng nước ngoài? May mắn

cho chúng ta, có thể nghe trên TV/radio/internet miễn phí cả ngày những người nước ngoài nói tiếng mẹ đẻ , và có thể kết bạn giao lưu với họ để mà luyện nghe luyện nói. Nếu đi học thêm ngoại ngữ, nhớ chọn nơi nào giáo viên có giọng nói chuẩn. Nhiều khi, việc bắt chước cách phát âm của một ngoại ngữ đối với ta khá là khó, đặc biệt khi mà trong tiếng của ta không có các âm như thế hoặc có những âm trong tiếng của ta được coi là một mà trong thứ tiếng khác lại được coi là khác nhau. Khi đó cần đến sự hướng dẫn của những người thành tạo, chỉ cho ta biết cách phân biệt âm.

6. Suy nghĩ trực tiếp bằng ngoại ngữ, bỏ bớt tiếng Việt trung gian. Khi muốn diễn đạt một vật thể/khái niệm/hình ảnh nào đó bằng tiếng nước ngoài, nhiều người diễn đạt nó trong đầu bằng tiếng mẹ đẻ trước rồi dịch nó. Ví dụ: -> "bút chì" -> "pencil". Quá trình ngược lại cũng thế, khi nhìn thấy từ "pencil" thì dịch nó ra thành từ "bút chì" trước rồi mới hình dung cái bút chì trong đầu. Làm như thế mất hai bước thay vì chỉ một bước, sẽ nói không trôi chảy. Muốn trôi chảy, ngoài kết nối "bút chì" -> "pencil" phải tạo được kết nối thẳng từ  đến "pencil" trong đầu (bằng cách: khi mắt nhìn  thì đồng thời tai nghe từ "pencil" hoặc/và miệng nói từ đó hoặc/và mắt đọc từ đó). Cần tập suy nghĩ trực tiếp bằng tiếng mà ta muốn nói thạo, bỏ qua trung gian được càng nhiều càng tốt.Trong quá trình tập suy nghĩ trực tiếp như vậy, ta cũng sẽ thấy được những chỗ còn ngắc ngứ, cần bổ sung.

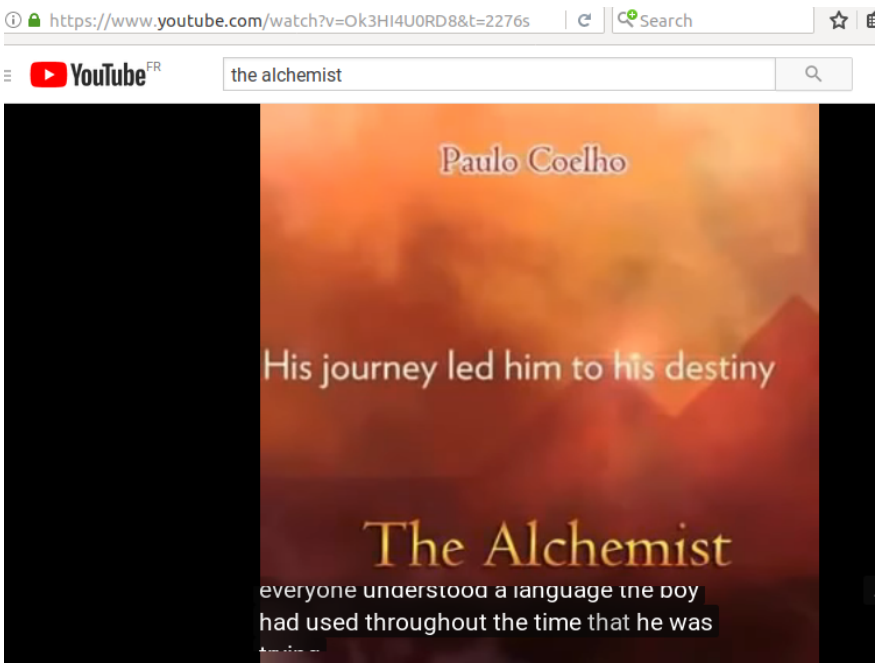
7. Mỗi tiếng có những điểm cần chú ý riêng. Ví dụ như tiếng Italia phát âm khá dễ, viết thế nào đọc thế đó, nhưng tiếng Anh phát âm lại khó, vì có vô cùng nhiều các ngoại lệ. Bởi vậy, khi học tiếng Anh mà ta ta cứ đoán mò phát âm thì rất dễ thành nói ngọng, phát âm sai rất nhiều (là hiện tượng khá phổ biến đối với người nước ngoài

Một nhóm sinh viên đang xem video bài giảng có phụ đề tiếng Anh về trí tuệ nhân tạo xử lý ngôn ngữ (CS224N của Stanford). Nghe giảng trực tiếp bằng ngoại ngữ là một cách hiệu quả để học tiếng đồng thời với học chuyên môn.

nói tiếng Anh). Để phát âm đúng tiếng Anh thì không được đoán mò dựa trên chữ viết, mà cần nghe đi nghe lại xem người ta nói thế nào rồi bắt chước cho giống. Nếu như tiếng Hoa có ngữ pháp gần giống tiếng Việt, thì phần lớn cá thứ tiếng châu Âu có ngữ pháp phức tạp hơn rất nhiều, cần học ngữ pháp thật cẩn thận nếu không rất dễ hiểu sai (nhiều khi hiểu ngược nghĩa hoàn toàn) những câu phức tạp. Lỗi hiểu sai ngữ pháp là lỗi mà đa phần các dịch giả Việt Nam mắc phải.

8. Cá nhân hóa bài học cho gần gũi với ta. Một điểm dở của nhiều bài học ngoại ngữ là nó nhạt nhẽo, với các câu chuyện chẳng có nội dung ly kỳ hấp dẫn cũng chảng liên quan gì đến người học. Nếu ta cá nhân hóa được các bài học đó sao cho thành liên quan, gần gũi với ta hơn, tạo nhiều cảm xúc hơn, thì học sẽ nhanh hơn. Ví dụ, thay vì nói anh A gặp chị B nào đó, ta hãy nói về ta gặp bạn ta hay là hai bạn thân của ta gặp nhau. Thay vì tả chiếc xe trời ơi nào đó, ta hãy tả chiếc xe của ta, v.v.

9. Dịch theo cả khúc câu, đừng dịch kiểu từng từ một. Cách nói trong các thứ tiếng khác nhau là khác nhau. Một lỗi phổ biến mà rất nhiều người mắc phải khi nói tiếng nước ngoài là dịch theo kiểu từng từ một từ tiếng này sang tiếng kia, thành ra câu sai hoặc ngớ ngẩn vô nghĩa, vì ở tiếng kia người ta không nói kiểu như vậy. Một ví dụ đơn giản là "Tôi lạnh" tiếng Việt, sang tiếng Anh phải thêm động từ "to be" ("là") vào thành "I'm cold" chứ người ta không nói "I cold", còn sang tiếng Pháp thì lại phải thêm động từ "avoir" ("có") vào thành "J'ai froid" chứ người ta cũng không nói "Je suis froid".



Audio của truyện nổi tiếng Nhà Giả Kim (The Alchemist) có trên youtube cùng với phụ đề tiếng Anh, có thể dùng để học tiếng Anh.

10. Mạnh dạn nói viết, chịu khó sửa sai. Muốn nắm vững tiếng,

thì phải "liều mình như chẳng có", nói viết không sợ sai, không sợ bị chê cười. Vì phải viết ra, nói ra thì ta mới dễ nhận biết mình sai ở đâu để mà sửa. Và phải chịu khó viết nhiều, nói nhiều mới chuyển dần từ ấp úng sang trôi chảy. Chứ nếu ngại hay sợ thì mãi cũng sẽ không viết được, nói được. Tất nhiên, chỉ nói, viết "văng mạng" mà không chịu chú ý sửa lỗi sai thì cũng sẽ nói ngọng mãi. Nếu ngại nói/viết cho người khác, thì có thể tự nói viết với mình, rồi đọc lại cái mình viết, nghe lại cái mình nói để mà tìm lỗi, điều chỉnh.

11. Vận dụng các liên tưởng trợ giúp việc nhớ từ. Mỗi khi học một từ mới hay khái niệm mới, càng tạo được nhiều liên tưởng, mối liên hệ giữa nó với những tứ đã nhớ hoặc dễ nhớ khác, thì bản thân từ đó càng trở nên dễ nhớ. Các liên tưởng đó có thể ở bất cứ dạng nào. Một ví dụ vui là để học động từ "caber" ("đặt vừa vào", "to fit") tiếng Tây Ban Nha, một người Mỹ có thể liên tưởng nó với việc đặt con gấu (bear) vào xe (car): Can one fit a bear in a car? (Ghép car vào bear và bỏ đi vài chữ cái thì thành caber, phát âm như là car + bear).

12. Tích cực dùng ngay vào những hoạt động hay. "Hay" ở đây có nghĩa là đem lại cho chúng ta lợi ích hay vui thú gì đó, ví dụ như đọc một quyển truyện hay, nghe một bài hát hay, xem một bộ phim hay, hay là đi mua bán, tranh luận, v.v. (bằng ngôn ngữ mà ta muốn sử dụng thành thạo). Một công đôi việc, và vì hay nên dễ nhớ. Khi trình độ về tiếng chưa đủ thì vẫn có thể làm những việc đó với sự trợ giúp (và cần có trợ giúp). Ví dụ, như khi xem phim hay nghe nhạc thì có phụ đề, khi đi chợ thì mang theo từ điển thông minh.

Một trong các hoạt động thú vị, vừa vui vừa hiệu quả là đọc các truyện song ngữ hay và được dịch chính xác đồng thời nghe audio tiếng nước ngoài của truyện đó, như thế vừa tìm hiểu được một tác

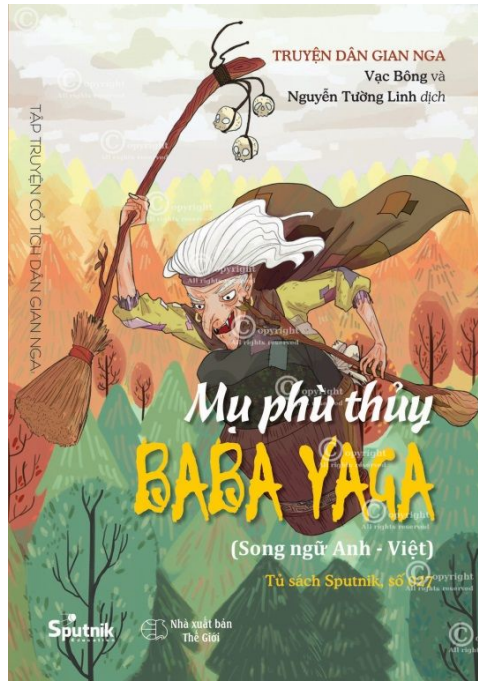
phẩm văn học hay, vừa học được cách diễn đạt bằng từ ngữ và cách phát âm bằng tiếng Anh cho nhiều thứ.

Bộ sách Song ngữ Anh-Việt của Sputnik được làm theo hướng đó, nhằm phục vụ bạn học tiếng Anh. Các sách trong bộ được dịch cẩn thận, chính xác đến từng câu, có thể đối chiếu giữa hai bên Anh-Việt để học các câu tiếng Anh, đồng thời nghe audio tiếng Anh tương ứng có trên mạng.

http://shop.sputnikedu.com/?54,bilingualbooks

Mụ phù thủy Baba Yaga (song ngữ Anh-Việt)

Truyện cổ tích dân gian Nga



Baba Yaga là nhân vật phù thủy nổi tiếng nhất trong các truyện dân gian của nước Nga và có lẽ là trên toàn thế giới, "bà tổ của tất cả các phù thủy". Theo các tiếng gốc Sla-vơ, Baba có nghĩa là "bà già". Còn về gốc của từ Yaga thì có nhiều giả thuyết khác nhau. Nó có thể có gốc từ Ấn Độ (tiếng Sanskrit cổ) với nghĩa là "con rắn", và trong các tiếng cổ khác ở châu Âu có những từ phát âm tương tự, với những nghĩa như là "độc ác", "khiếp hãi", "giận dữ", v.v...

Trong thần thoại Nga, Baba Yaga thường được hình dung như một mụ phù thủy già, xương xẩu, có mũi khoằm rất dài, sống trong rừng, ở trong một cái lều được dựng trên một đôi chân gà. Mụ đi lại bằng cách cưỡi một chiếc cối sắt, lái nó bằng chiếc chày sắt, và cầm cây chổi để quét sạch dấu vết phía sau mụ.

Tính cách của nhân vật Baba Yaga rất phức tạp. Trong nhiều truyện, mụ được mô tả là rất độc ác, thích ăn thịt trẻ em. Trong những truyện khác, mụ lại giúp đỡ một số người chống lại những nhân vật độc ác khác. Trong một số truyện khác nữa, không phải chỉ có một mụ Baba Yaga, mà có thể có tới ba chị em phù thủy cùng được gọi là Baba Yaga.

Dù là độc ác hay có phần thân thiện, Baba Yaga cũng xuất hiện trong rất nhiều truyện cổ tích của Nga. Tuyển tập truyện cổ tích này gồm có tám truyện thuộc loại tiêu biểu nhất trong đó có sự xuất hiện của Baba Yaga, với rất nhiều tình tiết ly kỳ và nhiều nhân vật quen thuộc khác của thần thoại Nga, như là Koschei bất tử, Dubynia (Người Cây Sồi), v.v... Các truyện này có nguyên gốc bằng tiếng Nga, nhưng đã được dịch sang tiếng Anh từ cách đây khoảng một thế kỷ.

Tập truyện Baba Yaga nằm trong bộ sách song ngữ Anh-Việt của Sputnik Education. Trong bộ sách song ngữ này còn có những cuốn sách rất hay khác, ví dụ như The Little Prince (Hoàng Tử Bé), The Wonderful Wizard of Oz (Pháp sư kỳ diệu xứ Oz). Mục đích của bộ sách song ngữ Anh-Việt này là vừa nhằm giới thiệu các tác phẩm văn học đặc sắc trên thế giới, vừa nhằm giúp ích cho các bạn đang học tiếng Anh.

Ở đây, chúng tôi xin giới thiệu với các bạn chương đầu tiên của quyển sách này, nhan đề "baba Yaga cô bé tốt bụng".

Baba Yaga and the girl with the kind heart

Baba Yaga và cô bé tốt bụng

Audio: https://www.youtube.com/watch?v=TUZJi2SsIwc

Once upon a time there was a widowed old man who lived alone in a hutwith his little daughter.

They were very happy together, and they used to smile at each other over a table piled with bread and jam.

Everything went well, until the old man decided to marry again. The old man became foolish in his old age, and he took another wife.

So the poor little girl had a stepmother. After that everything changed. There was no more bread and jam on the table, and no more playing.

The stepmother said that everything that went wrong was the little girl's fault.

The old man believed his new wife, and so there were no more kind words for his little daughter.

Day after day the stepmother used to say that the little girl was too naughty[1] to sit at the table. Then she would throw her a crust[2] and tell her to get out of the hut and go and eat it somewhere else.

Ngày xưa có một ông lão goá vợ sống đơn chiếc trong một ngôi lều với đứa con gái nhỏ.

Hai cha con sống cùng nhau rất đầm ấm, và thường cười đùa với nhau bên chiếc bàn chất đầy bánh mì và mứt.

Mọi chuyện diễn ra êm đềm cho đến một ngày ông lão quyết định tái hôn. Ông lão trở nên ngớ ngẩn khi về già, và ông lấy vợ lần nữa.

Thế là cô bé đáng thương có mẹ kế. Từ đó mọi chuyện bắt đầu thay đổi. Chẳng còn bánh mì và mứt trên bàn nữa, cũng chẳng còn những dịp cười đùa.

Tất cả mọi chuyện không hay xảy ra trong nhà, bà mẹ kế đều đổ tội cho cô bé.

Ông lão tin người vợ mới của mình, và không còn dành cho cô con gái bé nhỏ những lời dịu dàng nữa.

Ngày qua ngày, người mẹ kế luôn kêu rằng cô bé quá hư đốn nên không đáng được ngồi vào bàn ăn. Rồi bà ta quẳng cho cô một mẩu bánh mì và ra lệnh cho cô đi ra ngoài, tìm chỗ khác mà ăn.

[1] *naughty*: hư đốn, nghịch ngợm, tục tĩu.
[2] *crust*: vỏ cứng; mẩu bánh mì khô.

The poor little girl used to go away by herself into the shed[1] in the yard, and wet the dry crust with her tears, and eat it all alone. She often wept for the old days, and she often wept at the thought of the days that were to come.

Mostly she wept because she was all alone, until one day she found a little friend in the shed.

She was hunched up[2] in a corner of the shed, eating her crust and crying bitterly, when she heard a little noise. It was a scratching sound coming from a little gray mouse who lived in a hole.

He came out with his little pointed nose and his long whiskers, his little round ears and his bright eyes. Then he sat up on his hind legs, and curled his tail twice round himself and looked at the little girl.

The little girl, who had a kind heart, forgot all her sorrows, and took a scrap of her crust and threw it to the little mouse. The mouse nibbled and nibbled, and then it was gone, and he was looking for another.

Cô bé đáng thương hay lủi thủi lẩn vào trong nhà kho ở ngoài sân, khóc đẫm nước mắt ướt cả bánh mì, và ngồi ăn một mình. Cô hay khóc vì nhớ về những ngày đã qua, và cô cũng hay khóc khi nghĩ đến những ngày sắp tới.

Phần nhiều cô bé khóc vì cô đơn, cho đến một hôm cô phát hiện thấy một người bạn nhỏ trong nhà kho.

Cô bé đang ngồi co ro trong góc nhà kho, vừa ăn bánh mì vừa đau đớn khóc, thì bỗng nghe thấy một tiếng động. Đó là tiếng sột soạt phát ra từ một con chuột nhắt lông xám sống trong hốc.

Con chuột chui ra, với chiếc mũi nhọn hoắt và bộ ria dài, đôi tai tròn và ánh mắt sáng quắc. Rồi nó ngồi trên đôi chân sau, cuộn tròn chiếc đuôi hai vòng quanh mình và nhìn cô bé.

Vốn có trái tim nhân hậu, cô bé quên hết mọi nỗi buồn và bẻ một mẩu bánh mì quăng ra cho chuột. Chuột gặm say sưa, và đến khi hết sạch mẩu bánh mì, chú lại muốn tìm một mẩu nữa.

---

[1] *shed*: lều nhỏ dùng làm nhà kho; chuồng gia súc.

[2] *hunch*: cái bướu; *to be hunched up*: co ro, cong lưng.

She gave him another bit, and presently that was gone, and another and another, until there was no crust left for the little girl.

She didn't mind that because she was so happy seeing the little mouse nibbling and nibbling.

When the crust was done the mouse looked up at her with his little bright eyes.

"Thank you," he said, in a little squeaky voice.

"Thank you," he said, "you are a kind little girl, and I am only a mouse, and I've eaten all your crust. But there is one thing I can do for you, and that is to tell you to take care."[1]

"The old woman in the hut (and that was the cruel stepmother) is a sister of Baba Yaga the witch. So if ever she sends you on a message to your aunt, you come and tell me. For Baba Yaga would eat you soon enough with her iron teeth if you did not know what to do."

Cô bé lại cho chuột một mẩu nữa, và mẩu ấy cũng hết, rồi lại một mẩu nữa và một mẩu nữa, cho đến khi cô bé không còn mẩu nào để ăn.

Cô bé không bận tâm đến điều đó vì cô quá vui khi thấy chuột gặm bánh say sưa.

Sau khi ăn xong bánh mì, chuột ngước nhìn cô bé với đôi mắt sáng tí hon.

"Cám ơn cậu," chuột cất giọng chít chít nho nhỏ.

"Cám ơn cậu," chuột nói, "cậu quả là một cô bé tốt bụng, còn tớ chỉ là một chú chuột, thế mà tớ ăn hết bánh mì của cậu. Nhưng tớ có thể làm cho cậu một việc, đó là mách cho cậu cách để được bình an."

"Bà già trong túp lều (tức người mẹ kế độc ác) là chị của mụ phù thuỷ Baba Yaga. Cho nên nếu bà ta sai cậu đi gặp dì của cậu, hãy đến báo cho tớ biết. Vì Baba Yaga sẽ nhanh chóng ăn thịt cậu bằng hàm răng bằng sắt của mụ, nếu cậu không biết xoay sở."

[1] *take care*: cẩn trọng; bảo trọng; lời chào chia tay; *to take care of something*: xử lý cái gì đó.

Baba Yaga was a terrible witch with iron teeth. She was bony[1] all over, and her eyes flashed and she drove about in a mortar[2], beating it with a pestle[3], and sweeping up her tracks with a broom so that you could not tell which way she had gone

She lived in a little hut which stood on hen's legs. Sometimes it faced the forest, sometimes it faced the path, and sometimes it walked about.

"Oh, thank you," said the little girl and just then she heard the step-mother calling to her to come in and clean up the tea things, and tidy the house, and brush out the floor, and clean everybody's boots.

So off she had to go.

When she went in she had a good look at her stepmother, and sure enough she had a long nose, and she was as bony as a fish and the little girl thought of Baba Yaga and shivered, though she did not feel so bad when she remembered the mouse out there in the shed in the yard.

Baba Yaga là một mụ phù thuỷ ghê rợn với hàm răng bằng sắt. Mụ ta gầy quắt queo, đôi mắt thì sáng lóe, và mụ di chuyển trong một cái cối và bẻ lái bằng chày. Đi đến đâu, mụ ta xóa sạch dấu vết sau lưng đến đó bằng một cây chổi để không ai biết mụ ta đã đi đâu.

Mụ ta sống trong một căn nhà chòi nằm trên cặp chân gà. Đôi khi ngôi nhà xoay vào rừng, đôi khi lại xoay ra phía đường đi, và có khi lại di chuyển loanh quanh

"Ồ, cảm ơn cậu nhé," cô bé đáp và ngay lúc đó chợt nghe thấy mẹ kế đang gọi mình vào nhà để thu dọn ấm tách uống trà, dọn dẹp nhà cửa, quét nhà và đánh giày cho mọi người.

Thế là cô bé phải đi vào.

Khi bước vào nhà, cô bé nhìn kỹ người mẹ kế, và quả thật, bà ta có chiếc mũi khoằm, toàn thân gầy đét như con cá khô. Cô bé nghĩ đến mụ Baba Yaga và rùng mình, tuy nhiên cô không còn thấy quá sợ nữa sau khi cô nhớ đến bạn chuột trong nhà kho ở ngoài sân.

[1]bony: nhiều xương; xương xẩu, gầy giơ xương.
[2]mortar: vữa (để xây tường), cái cỗi (để giã); súng cối.
[3]pestle: cái chày.

The very next morning it happened. The old man went off to pay a visit to some friends of his in the next village. As soon as the old man was out of sight the wicked stepmother called the little girl.

"You are to go today to your dear little aunt in the forest," she said, "and ask her for a needle and thread to mend[1] a shirt."

"But here is a needle and thread," said the little girl.

"Hold your tongue," said the stepmother, and she gnashed her teeth, and they made a noise like clattering tongs[2]. "Hold your tongue," she said. "Didn't I tell you, you are to go today to your dear little aunt to ask for a needle and thread to mend a shirt?"

"How shall I find her?" said the little girl, nearly ready to cry, for she knew that her aunt was Baba Yaga the witch.

The stepmother took hold of the little girl's nose and pinched it.

"That is your nose," she said. "Can you feel it?"

Chuyện xảy đến vào sáng hôm sau. Ông lão đi thăm một vài người bạn ở làng bên. Ông vừa đi khuất dạng thì bà mẹ kế độc ác liền gọi cô bé.

"Hôm nay mày hãy đi thăm người dì yêu quý của mày ở trong rừng," bà ta nói, "và hãy hỏi mượn dì ấy kim và chỉ để vá áo."

"Nhưng nhà mình có kim và chỉ đây rồi," cô bé đáp.

"Im miệng đi," bà mẹ kế vừa nói vừa nghiến răng, và chúng kêu lên ken két như những lưỡi kẹp sắt đập vào nhau. "Im miệng đi," bà ta nói. "Tao đã bảo rồi, hôm nay mày hãy đi thăm người dì yêu quý của mày để xin kim và chỉ về vá áo, nghe chưa?"

"Làm sao con tìm được dì?" cô bé hỏi và chực khóc, vì cô biết rằng dì của mình chính là mụ phù thuỷ Baba Yaga.

Bà mẹ kế túm lấy mũi cô bé và bóp nó.

"Hãy dùng mũi của mày đó," bà nói. "Có cảm nhận được không?"

[1]to mend: vá, sửa chữa, cải thiện.

[2]Tongs (thường dùng số nhiều): cái cặp, cái kẹp; đôi dép tông.

"Yes," said the poor little girl.

"You must go along the road into the forest till you come to a fallen tree; then you must turn to your left, and then follow your nose and you will find her," said the stepmother. "Now, be off with you, lazy one. Here is some food for you to eat along the way." She gave the little girl a bundle[1] wrapped up in a towel.

The little girl wanted to go into the shed to tell the mouse she was going to Baba Yaga, and to ask what she should do. But she looked back, and there was the stepmother at the door watching her. So she had to go straight on.

She walked along the road through the forest till she came to the fallen tree. Then she turned to the left. Her nose was still hurting where the stepmother had pinched it, so she knew she had to go straight ahead.

She was just setting out when she heard a little noise under the fallen tree. "Scratch—scratch."

Out jumped the little mouse, and sat up in the road in front of her.

"Có ạ," cô bé đáng thương đáp.

"Mày phải đi theo con đường dẫn vào rừng cho đến khi gặp một cái cây bị đổ; sau đó thì rẽ trái, và cứ thế theo mũi mày mà đi thì mày sẽ tìm thấy dì," bà mẹ kế nói. "Thôi, mày hãy đi đi, đồ lười nhác. Đây là đồ ăn để ăn dọc đường." Bà ta đưa cô bé một gói đồ ăn cuộn trong một cái khăn.

Cô bé muốn vào trong nhà kho để báo với bạn chuột rằng cô sắp đi gặp Baba Yaga, và hỏi chuột xem cô phải làm gì. Nhưng cô ngoảnh lại và thấy mẹ kế đang đứng ở cửa theo dõi mình. Thế là cô đành phải đi thẳng.

Cô bé đi theo con đường xuyên vào rừng cho đến khi gặp cái cây đổ. Rồi cô rẽ trái. Mũi cô vẫn còn đau ở chỗ bị bà mẹ kế véo, nên cô biết rằng mình còn phải đi thẳng tiếp.

Cô vừa chực cất bước thì bỗng nhiên nghe một tiếng động nhỏ phát ra bên dưới cái cây đổ. "Soạt - soạt."

Chú chuột nhảy ra, và ngồi trên đường ngay trước mặt cô bé.

[1]bundle: bó, bọc, gói; to bundle into: nhét vào; to bundle off: đi vội, tống đi.

“Oh mouse, mouse,” said the little girl, “my stepmother has sent me to her sister. And that is Baba Yaga the witch, and I do not know what to do.”

“It will not be difficult,” said the little mouse, “because of your kind heart. Take all the things you find on the road, and do with them what you like. Then you will escape from Baba Yaga, and everything will be well.”

“Are you hungry, mouse?” said the little girl.

“I could nibble, I think,” said the little mouse.

When the little girl unfastened the towel there was nothing in it but stones. That was what the stepmother had given the little girl to eat along the way.

“Oh, I’m so sorry,” said the little girl. “There’s nothing for you to eat.”

“Isn’t there?” said mouse, and as she looked at them the little girl saw the stones turn to bread and jam.

The little girl sat down on the fallen tree, and the little mouse sat beside her, and they ate bread and jam until they were not hungry any more.

“Ôi bạn chuột,” cô bé thốt lên, “mẹ kế của tớ sai tớ đi đến chỗ em gái của bà ta. Và đó là mụ phù thủy Baba Yaga, tớ không biết phải làm gì.”

“Việc này không khó đâu,” chuột đáp, “vì cậu có một trái tim nhân hậu. Hãy nhặt lấy những thứ cậu thấy trên đường, và tùy nghi sử dụng chúng. Rồi cậu sẽ thoát khỏi Baba Yaga, và mọi chuyện sẽ tốt đẹp.”

“Chuột ơi, cậu có đói bụng không?” cô bé hỏi.

“Tớ muốn được ăn một chút,” chú chuột đáp.

Khi cô bé mở chiếc khăn ra thì bên trong chẳng có gì ngoài những hòn đá. Đó là những gì mà bà mẹ kế cho cô để ăn dọc đường.

“Ôi, tớ rất tiếc,” cô bé nói. “Chẳng có gì để cho cậu ăn cả.”

“Không có gì ư?” chuột nói, và khi nhìn lại cô bé thấy những hòn đá đã hóa thành bánh mì và mứt.

Cô bé ngồi xuống trên cái cây đổ, chú chuột nhỏ ngồi bên cạnh cô, và cả hai ăn bánh mì và mứt cho đến khi hết đói.

"Keep the towel," said the little mouse, "I think it will be useful. And remember what I said about the things you find on the way. Now goodbye," he said.

"Goodbye," said the little girl, and ran along.

As she was running along she found a nice new handkerchief lying on the road. She picked it up and took it with her. Then she found a little bottle of oil. She picked it up and took it with her. Then she found some scraps of meat.

"Perhaps I'd better take them too," she said, and she took them.

Then she found a blue ribbon, and she took that. Then she found a little loaf of good bread, and she took that too.

"I am sure somebody will like it," she said.

Then she came to the hut of Baba Yaga the witch. There was a high fence round it with big gates.

When she pushed them open they squeaked miserably, as if it hurt them to move. The little girl was sorry for them.

"Hãy giữ lấy chiếc khăn," chuột nói, " Nó sẽ hữu ích đấy. Và hãy nhớ lời tớ dặn về những thứ cậu tìm thấy trên đường. Tạm biệt nhé," chuột nói.

"Tạm biệt," cô bé đáp và lên đường.

Trên đường đi, cô bé tìm thấy một chiếc khăn tay mới tinh xinh đẹp nằm dưới đất. Cô nhặt nó lên và mang theo. Rồi cô thấy một chai dầu nhỏ. Cô lại nhặt nó lên và mang theo. Rồi cô tìm thấy một ít mẩu thịt.

"Có lẽ mình cũng nên mang theo," cô bé nghĩ, và nhặt chúng.

Rồi cô bé tìm thấy một dải ruy-băng màu xanh, và cô nhặt lấy. Sau đó cô lại thấy một ổ bánh mì nhỏ, và cô cũng nhặt nó.

"Chắc chắn là có ai đó sẽ thích món này," cô bé nghĩ bụng.

Rồi cô bé đặt chân đến căn chòi của phù thủy Baba Yaga, nơi có hàng rào cao với các cánh cổng to tướng.

Khi cô đẩy cánh cổng thì nó kêu cọt kẹt một cách khổ sở, như thể rất đau đớn khi chuyển động. Cô bé cảm thấy thương chúng.

"How lucky," she said, "that I picked up the bottle of oil!" and she poured the oil into the hinges of the gates.

Inside the railing was Baba Yaga's hut, and it stood on hen's legs and walked about the yard.

In the yard Baba Yaga's servant was standing there, and she was crying bitterly because of the tasks Baba Yaga set her to do. She was crying bitterly and wiping her eyes on her sleeve.

"How lucky," said the little girl, "that I picked up a handkerchief!" She gave the handkerchief to Baba Yaga's servant, who wiped her eyes on it and smiled through her tears.

Close by the hut was a huge dog, very thin, gnawing[1] a dry crust.

"How lucky," said the little girl, "that I picked up a loaf!" She gave the loaf to the dog, and he gobbled[2] it up and licked his lips.

The little girl went bravely up to the hut and knocked on the door.

"Thật may là mình đã nhặt chai dầu!" cô bé nói, và cô tra dầu vào bản lề của các cánh cổng.

Bên trong hàng rào là căn chòi của Baba Yaga, nằm trên cặp chân gà và đang đi quanh sân.

Trong sân, người hầu của Baba Yaga đang đứng đó, và cô ta khóc nức nở bởi những việc mà Baba Yaga bắt cô phải làm. Cô đang khóc nức nở và lấy tay áo lau nước mắt.

"May quá," cô bé nhủ thầm, "mình có nhặt được chiếc khăn tay!" Cô bé tặng chiếc khăn cho người hầu của mụ phù thủy, cô ta lau nước mắt và mỉm cười trong ánh lệ.

Ở cạnh căn chòi có một con chó to tướng, rất gầy gò, đang gặm vỏ bánh khô.

"Quả là may mắn," cô bé lại nhủ, "khi mình nhặt được một ổ bánh!" Cô bé cho con chó ổ bánh mì, và nó nuốt lấy nuốt để rồi liếm mép.

Cô bé lấy hết can đảm bước đến căn chòi và gõ cửa.

[1] to gnaw: gặm; giày vò.

[2] to gobble: kêu gộp gộp (gà tây); ăn ngấu nghiến, nuốt lấy nuốt để.

"Come in," said Baba Yaga.

The little girl went in, and there was Baba Yaga the witch, sitting weaving at a loom[1]. In a corner of the hut was a thin black cat watching a mouse-hole.

"Good day to you, auntie," said the little girl, trying not to tremble.

"Good day to you, niece," said Baba Yaga.

"My stepmother has sent me to you to ask for a needle and thread to mend a shirt."

"Very well," said Baba Yaga, smiling, and showing her iron teeth. "You sit down here at the loom and go on with my weaving, while I go and get you the needle and thread."

The little girl sat down at the loom and began to weave.

Baba Yaga went out and called to her servant, "Go, make the bath hot and scrub my niece. Scrub her clean. I'll make a dainty[2] meal of her."

The servant came in for the jug. The little girl begged her, "Don't be too quick in making the fire, and carry the water in a sieve."

"Vào đi," Baba Yaga nói.

Cô bé bước vào, và trước mặt cô là phù thủy Baba Yaga, đang ngồi dệt bên khung cửi. Ở góc phòng là một con mèo đen gầy gò đang rình một cái hang chuột

"Cháu chào dì ạ," cô bé nói, cố để không run rẩy.

"Chúc cháu một ngày tốt đẹp," Baba Yaga đáp.

"Mẹ cháu sai cháu đến xin dì kim và chỉ để vá áo."

"Tốt thôi," Baba Yaga nói, mỉm cười và để lộ hàm răng sắt. "Cháu hãy ngồi vào khung cửi này và dệt tiếp cho dì, trong lúc dì đi lấy kim chỉ."

Cô bé ngồi xuống khung cửi và bắt đầu dệt.

Baba Yaga ra ngoài và gọi người hầu của mụ, "Hãy đi sửa soạn một bồn nước nóng và kỳ cọ cháu của tao cho sạch. Cọ thật sạch. Tao muốn ăn nó một bữa ngon miệng."

Người hầu đi vào nhà để lấy nồi. Cô bé cầu xin cô ta, "Xin cô đừng thổi lửa nhanh quá, và hãy múc nước bằng một cái sàng."

[1]loom: khung cửi (dệt vải); bóng lờ mờ.
[2]dainty: ngon lành; xinh xắn.

The servant smiled, but said nothing, because she was afraid of Baba Yaga. But she took a very long time about getting the bath ready.

Baba Yaga came to the window and asked, —

"Are you weaving, little niece? Are you weaving, my pretty?"

"I am weaving, auntie," said the little girl.

When Baba Yaga went away from the window, the little girl spoke to the thin black cat who was watching the mouse-hole.

"What are you doing, thin black cat?"

"Watching for a mouse," said the thin black cat. "I haven't had any dinner for three days."

"How lucky," said the little girl, "that I picked up the scraps of meat!" She gave them to the thin black cat. The thin black cat gobbled them up, and said to the little girl,—

"Little girl, do you want to get out of this?"

"Dear cat," said the little girl, "I do want to get out of this, for Baba Yaga is going to eat me with her iron teeth."

Cô người hầu mỉm cười, nhưng không nói gì vì e sợ Baba Yaga. Nhưng cô cố kéo thật dài thời gian chuẩn bị bồn tắm.

Baba Yaga lại gần cửa sổ và cất tiếng hỏi:

"Cháu gái bé bỏng đang dệt chứ? Vẫn đang dệt chứ, cháu xinh đẹp?"

"Cháu vẫn đang dệt, dì ạ," cô bé đáp.

Khi Baba Yaga đi khỏi chỗ cửa sổ, cô bé nói chuyện với mèo đen gầy gò đang rình lỗ chuột.

"Mèo đen gầy gò à, cậu đang làm gì thế?"

"Tớ đang rình một con chuột," chú mèo đen gầy gò đáp. "Ba ngày rồi tớ chưa hề ăn bữa nào cả."

"Quả là may mắn," cô bé nói, "khi mình nhặt được một ít thịt!" Cô bé đem thịt cho mèo đen gầy gò. Mèo nuốt chửng chỗ thịt ấy, và nói với cô bé:

"Cô bé ơi, cậu có muốn thoát khỏi nơi này không?"

"Mèo yêu quý ơi," cô bé thốt lên, "tớ rất muốn thoát khỏi đây, vì Baba Yaga sẽ ăn thịt tớ với hàm răng sắt của mụ."

"Well," said the cat, "I will help you."

Just then Baba Yaga came to the window.

"Are you weaving, little niece?" she asked. "Are you weaving, my pretty?"

"I am weaving, auntie," said the little girl, working away, while the loom went clickety clack, clickety clack.

Baba Yaga went away.

The thin black cat said to the little girl, "You have a comb in your hair, and you have a towel. Take them and run for it while Baba Yaga is in the bath-house.

When Baba Yaga chases after you, you must listen and when she is close to you, throw away the towel and it will turn into a big, wide river.

It will take her a little time to get over that. But when she does, you must listen and as soon as she is close to you throw away the comb, and it will sprout up into such a forest that she will never get through it at all."

"But she'll hear the loom stop," said the little girl.

"Được rồi," mèo nói, "Tớ sẽ giúp cậu."

Vừa lúc đó Baba Yaga đến bên cửa sổ.

"Cháu bé bỏng ơi, cháu còn dệt không?" mụ ta hỏi. "Cháu còn dệt không, cháu gái xinh đẹp?"

"Cháu đang dệt, dì ạ," cô bé vừa nói vừa làm liên tục, trong lúc khung cửi chạy lách cách, lách cách.

Baba Yaga bỏ đi.

Mèo đen gầy gò bảo cô bé, "Cậu có một cái lược trên đầu, và một cái khăn. Hãy mang chúng theo và chạy thoát thân khi Baba Yaga còn ở trong nhà tắm.

Khi Baba Yaga đuổi theo cậu, cậu phải lắng nghe và khi bà ta đến gần, hãy ném cái khăn xuống đất và nó sẽ biến thành một dòng sông lớn.

Nó sẽ khiến bà ta mất thời gian để vượt qua. Khi bà ta vượt qua sông, cậu phải lắng nghe và khi bà ta đến gần, hãy ném cái lược đi, và nó sẽ biến thành một khu rừng mà bà ta sẽ không bao giờ đi xuyên qua được."

"Nhưng bà ta sẽ nghe thấy khung cửi ngừng chạy," cô bé nói.

"I'll see to that," said the thin black cat.

The cat took the little girl's place at the loom

Clickety clack, clickety clack, the loom never stopped for a moment.

The little girl looked to see that Baba Yaga was in the bathhouse, and then she jumped down from the little hut on hen's legs, and ran to the gates as fast as her legs could go.

The big dog leapt up to tear her to pieces. Just as he was going to spring on her he saw who she was.

"Why, this is the little girl who gave me the loaf," he said. "A good journey to you, little girl," and he lay down again with his head between his paws.

When she came to the gates they opened quietly, without making any noise at all, because of the oil she had poured into their hinges.

Outside the gates there was a little birch tree that beat her in the eyes so that she could not go by.

"Tớ sẽ lo chuyện đó," mèo đen gầy gò đáp.

Mèo ngồi vào khung cửi thay chỗ cô bé.

Lách cách, lách cách, khung cửi không dừng lại lúc nào.

Cô bé nhìn thấy Baba Yaga đang ở trong nhà tắm, và thế là cô nhảy từ căn chòi nhỏ trên cặp chân gà xuống dưới đất, và chạy nhanh hết sức ra phía cổng.

Con chó khổng lồ chồm dậy định xé xác cô bé. Nhưng khi sắp nhảy xổ vào thì nó nhận ra cô bé.

"Ủa, cô bé này đã tặng cho mình ổ bánh mì," nó nhủ thầm. "Chúc thượng lộ bình an nhé, cô bé," và nó nằm xuống gác đầu lên những chiếc móng vuốt.

Khi cô chạy đến cổng, các cánh cổng mở ra thật nhẹ nhàng, không gây ra tiếng động nào vì cô đã tra dầu vào bản lề.

Bên ngoài cổng là một cây bạch dương nhỏ cứ quất vào mắt cô khiến cô không thể đi qua.

"How lucky," said the little girl, "that I picked up the ribbon!" And she tied up the birch tree with the pretty blue ribbon.

The birch tree was so pleased with the ribbon that it stood still, admiring itself, and let the little girl go by.

How she did run!

Meanwhile the thin black cat sat at the loom. Clickety clack, clickety clack, sang the loom, but you never saw such a tangle as the tangle made by the thin black cat

Presently Baba Yaga came to the window.

"Are you weaving, little niece?" she asked. "Are you weaving, my pretty?"

"I am weaving, auntie," said the thin black cat, tangling and tangling, while the loom went clickety clack, clickety clack.

"That's not the voice of my little dinner," said Baba Yaga, and she jumped into the hut, gnashing her iron teeth. There was no little girl, but only the thin black cat, sitting at the loom, tangling and tangling the threads.

"Thật may là mình đã nhặt dải ruy-băng này!", cô bé nói. Cô liền buộc cành bạch dương lại bằng dải ruy-băng xinh đẹp màu xanh.

Cây bạch dương rất hài lòng với dải ruy-băng xanh nên nó đứng yên, tự ngắm nghía và để cho cô bé đi qua.

Cô bé liền chạy thật nhanh!

Trong lúc đó mèo đen gầy gò vẫn ngồi ở khung cửi. Khung cửi vẫn kêu lách cách, lách cách, nhưng sợi chỉ rối tung lên, chỉ có mèo đen gầy gò mới làm rối đến thế.

Một lát sau, Baba Yaga đến bên cửa sổ.

"Cháu bé bỏng ơi, cháu còn dệt không?" Mụ ta hỏi. "Cháu còn dệt không, cháu gái xinh đẹp?"

"Cháu đang dệt, dì ạ," mèo đen gầy gò cất giọng, tiếp tục làm rối tung lên, trong khi khung cửi cứ kêu lách cách, lách cách.

"Đó không phải là giọng nói của bữa ăn tối nhỏ bé của ta," Baba Yaga lên tiếng và xông vào trong căn chòi, nghiến hàm răng sắt. Không có cô bé, chỉ có mèo đen gầy gò, đang ngồi ở khung cửi, tiếp tục làm rối các sợi chỉ.

"Grr," said Baba Yaga, and jumped for the cat, and began banging it about. "Why didn't you tear the little girl's eyes out?"

"In all the years I have served you," said the cat, "you have only given me one little bone, but the kind little girl gave me scraps of meat."

Baba Yaga threw the cat into a corner, and went out into the yard.

"Why didn't you squeak when she opened you?" she asked the gates.

"Why didn't you tear her to pieces?" she asked the dog.

"Why didn't you beat her in the face, and not let her go by?" she asked the birch tree.

"Why were you so long in getting the bath ready? If you had been quicker, she never would have got away," said Baba Yaga to the servant.

She rushed about the yard, beating them all, and scolding at the top of her voice.

"Hừ," Baba Yaga rít lên, nhảy đến chỗ mèo, và bắt đầu nện mèo. "Tại sao mày không móc mắt con bé ra?"

"Bao nhiên năm qua tôi đã hầu hạ bà," mèo nói, "vậy mà bà chỉ cho tôi được có một cục xương nhỏ, còn cô bé tốt bụng đã cho tôi những mẩu thịt."

Baba Yaga ném con mèo vào một góc và chạy ra sân.

"Tại sao mày không rít lên khi con bé mở mày ra?", mụ hỏi các cánh cổng.

"Tại sao mày không xé xác con bé?", mụ hỏi con chó.

"Tại sao mày không đập vào mặt nó, mà lại để nó đi qua?", mụ hỏi cây bạch dương.

"Tại sao mày lại chuẩn bị bồn nước nóng lâu thế? Nếu mày làm nhanh hơn, nó đã chẳng bao giờ trốn đi được," Baba Yaga mắng người hầu gái.

Mụ ta chạy lồng lộn trong sân, đánh đập tất cả, và mắng nhiếc đến lạc giọng.

"Ah!" said the gates, "in all the years we have served you, you never even eased us with water, but the kind little girl poured good oil into our hinges."

"Ah!" said the dog, "in all the years I've served you, you never threw me anything but burnt crusts, but the kind little girl gave me a good loaf."

"Ah!" said the little birch tree, "in all the years I've served you, you never tied me up, even with thread, but the kind little girl tied me up with a blue ribbon."

"Ah!" said the servant, "in all the years I've served you, you have never given me even a rag, but the kind little girl gave me a pretty handkerchief."

Baba Yaga gnashed at them with her iron teeth. Then she jumped into the mortar and sat down. She drove it along with the pestle, and swept up her tracks with a broom, and flew off in pursuit of the little girl.

The little girl ran and ran. She put her ear to the ground and listened.

"À!" những cánh cổng lên tiếng, "suốt bao nhiêu năm chúng tôi hầu hạ bà, bà chưa bao giờ cho chúng tôi dù một miếng nước, còn cô bé tốt bụng kia đã tra dầu vào bản lề."

"À!" con chó nói, "suốt bao nhiêu năm tôi hầu hạ bà, bà chưa bao giờ cho tôi thứ gì ngoại trừ vỏ bánh cháy, còn cô bé tốt bụng kia đã cho tôi một ổ bánh mì ngon."

"À!" cây bạch dương nói, "suốt bao nhiêu năm tôi hầu hạ bà, bà chưa bao giờ trang trí cho tôi, dù chỉ bằng một sợi chỉ, còn cô bé tốt bụng kia đã thắt cho tôi một chiếc nơ xanh."

"À!" người hầu gái nói, "suốt bao nhiêu năm tôi hầu hạ bà, bà chưa bao giờ cho tôi dù chỉ một cái giẻ, nhưng cô bé tốt bụng kia lại cho tôi một chiếc khăn tay xinh xắn."

Baba Yaga nghiến hàm răng sắt với cả bọn. Rồi bà ta trèo vào chiếc cối. Bà ta lái nó đi bằng một cái chày, xóa sạch dấu vết của mình ở phía sau bằng một cái chổi, và bay đi để đuổi theo cô bé.

Cô bé cứ thế chạy mải miết. Rồi cô bé áp tai xuống đất để nghe ngóng.

И. БИЛИБИНЪ. 1900.

Bang, bang, bangety bang! She could hear Baba Yaga beating the mortar with the pestle.

Baba Yaga was quite close. There she was, beating with the pestle and sweeping with the broom, coming along the road.

As quickly as she could, the little girl took out the towel and threw it on the ground. The towel grew bigger and bigger, and wetter and wetter, and there was a deep, broad river between Baba Yaga and the little girl.

The little girl turned and ran on. How she ran!

Baba Yaga came flying up in the mortar. But the mortar could not float in the river with Baba Yaga inside. She drove it in, but only got wet for her trouble.

She turned home, and went flying back to the little hut on hen's legs. Then she got together all her cattle and drove them to the river.

"Drink, drink!" she screamed at them; and the cattle drankup all the river to the last drop.

Bùm, bùm, bum bùm! Cô bé nghe thấy Baba Yaga đang thúc chày vào cối.

Baba Yaga đang ở rất gần. Rốt cục bà ta cũng xuất hiện, đang tiến tới trên đường, vừa nện chày vào cối vừa dùng chổi quét dấu vết.

Cô bé liền nhanh tay rút chiếc khăn ra và ném xuống dưới đất. Chiếc khăn liền phồng lên, càng lúc càng lớn, càng lúc càng ướt, và một dòng sông sâu và rộng lớn xuất hiện ngăn giữa Baba Yaga và cô bé.

Cô bé lập tức quay đầu và tiếp tục chạy. Cô bé chạy quả là nhanh!

Baba Yaga bay đến trên chiếc cối. Nhưng chiếc cối cùng với Baba Yaga ở bên trong không thể trôi trên sông. Mụ lao chiếc cối vào sông nhưng chỉ bị ướt mà không ăn thua.

Mụ đành quay đầu, bay trở về căn chòi trên cặp chân gà. Rồi mụ gom tất cả gia súc lại và lùa chúng ra sông.

"Uống, uống đi!" mụ quát tháo; và đàn gia súc đã uống cạn nước của con sông đến giọt cuối cùng.

Baba Yaga, sitting in the mortar, drove it with the pestle, and swept up her tracks with the broom, and flew over the dry bed of the river and on in pursuit of the little girl.

The little girl put her ear to the ground and listened. Bang, bang, bangety bang! She could hear Baba Yaga beating the mortar with the pestle.

Nearer and nearer came the noise, and there was Baba Yaga, beating with the pestle and sweeping with the broom, coming along the road close behind.

The little girl threw down the comb, and grew bigger and bigger, and its teeth sprouted up into a thick forest,so thick that not even Baba Yaga could force her way through.

Baba Yaga, gnashing her teeth and screaming with rage and disappointment, turned round and drove away home to her little hut on hen's legs.

The little girl ran on home. She was afraid to go in and see her stepmother, so she ran into the shed.

Baba Yaga lại ngồi vào trong cối, dùng chày bẻ lái, tiếp tục quét chổi để xóa dấu vết trên đường, và bay qua dòng sông đã khô cạn để đuổi theo cô bé.

Cô bé áp tai xuống mặt đất và lắng nghe. Bùm, bùm, bùm bùm! Cô bé nghe thấy Baba Yaga đang nện chày vào cối.

Âm thanh ấy càng lúc càng đến gần, và Baba Yaga lại xuất hiện, vừa nện chày vừa quét dấu vết bằng cái chổi, đuổi theo sau ngay trên đường.

Cô bé ném chiếc lược xuống dưới đất, nó càng lúc càng to lên, và răng lược hóa thành một khu rừng rậm, rậm rạp đến nỗi ngay cả Baba Yaga cũng không thể nào đi xuyên qua được.

Baba Yaga nghiến hàm răng sắt, hét lên một cách đầy căm tức và thất vọng, đành quay đầu và lái cối trở về căn chòi nhỏ trên cặp chân gà của mụ.

Cô bé đã chạy về đến nhà. Vì e sợ vào nhà sẽ gặp mẹ kế nên cô bé chạy vào nhà kho.

Scratch, scratch! Out came the little mouse.

"So you got away all right, my dear," said the little mouse. "Now run in. Don't be afraid. Your father is back, and you must tell him all about it."

The little girl went into the house.

"Where have you been?" said her father, "and why are you so out of breath?"

The stepmother turned pale when she saw her, and her eyes glowed, and her teeth ground together until they broke.

But the little girl was not afraid, and she went to her father and climbed on his knee, and told him everything just as it had happened.

When the old man knew that the stepmother had sent his little daughter to be eaten by Baba Yaga, he was so angry that he drove her out of the hut, and ever afterwards lived alone with the little girl.

The little mouse came and lived in the hut, and every day it sat up on the table and ate crumbs, and warmed its paws on the little girl's glass of tea.

Soạt, soạt! Bạn chuột nhỏ xuất hiện.

"Này cô bé, vậy là cậu đã thoát được," chuột nói. "Bây giờ hãy đi vào nhà. Đừng sợ hãi. Cha của cậu đã về, và cậu phải nói cho cha biết chuyện này.

Cô bé bước vào nhà.

"Con đã đi đâu vậy?" người cha hỏi, "và tại sao con lại thở hổn hển thế?"

Khuôn mặt người mẹ kế tái nhợt khi thấy cô bé, mắt mụ long lên, và mụ nghiến hàm cho đến khi gãy cả răng.

Nhưng cô bé không sợ hãi, lại gần bên cha, trèo vào lòng cha và kể cho ông nghe mọi chuyện đã xảy ra.

Khi biết rằng người mẹ kế đã sai cô con gái nhỏ của mình đi để Baba Yaga ăn thịt, ông nổi giận vô cùng và tống bà ta ra khỏi nhà, rồi kể từ đó ông chỉ sống với cô bé.

Chú chuột nhỏ đã vào sống trong túp lều, hằng ngày ngồi trên bàn, ăn những mẩu bánh mì vụn, và áp các bàn chân vào tách trà của cô bé để sưởi ấm.