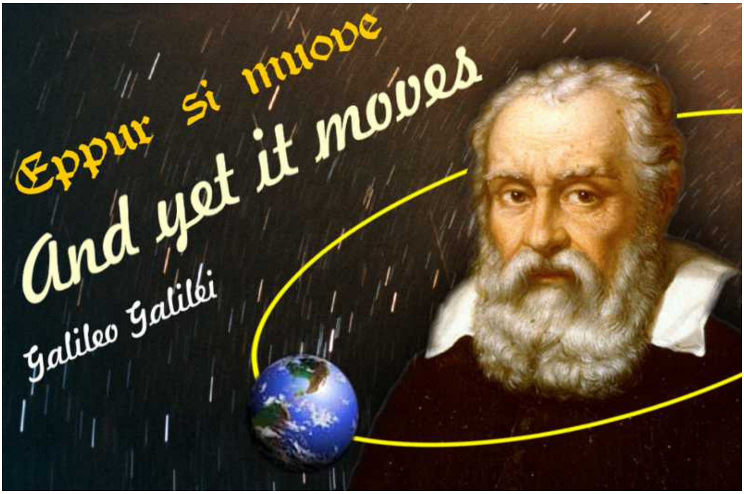
Thế giới tuần hoàn kỳ diệu

Nguyễn Tiến Dũng

Bài này là tóm tắt một phần nội dung của một quyển sách mà tác giả đang viết về thế giới tuần hoàn.

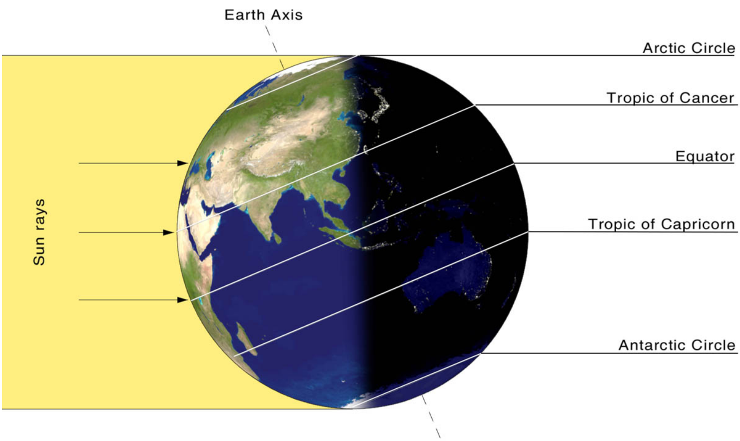
Dù sao trái đất vẫn quay!



Eppur si muove! Câu nói đó của Galileo Galilei (1564-1642) sau khi ông bị Tòa án Giáo hội kết tội tà đạo vào năm 1633, phải tuyên bố từ bỏ luận điểm *Trái Đất quay quanh Mặt Trời* của Copernic và bị giam lỏng cho đến hết đời, đã trở thành một biểu tượng của khoa học chống lại giáo điều, mà ngày nay chúng ta ai cũng biết. Đây chẳng phải chuyện đùa, vì nhà thiên văn học Giordano Bruno (1548-1600) đã bị Giáo hội thiêu sống vì "tội tà đạo" tương tự. Cũng may cho loài người, cuối cùng thì khoa học sẽ chiến thắng giáo điều.

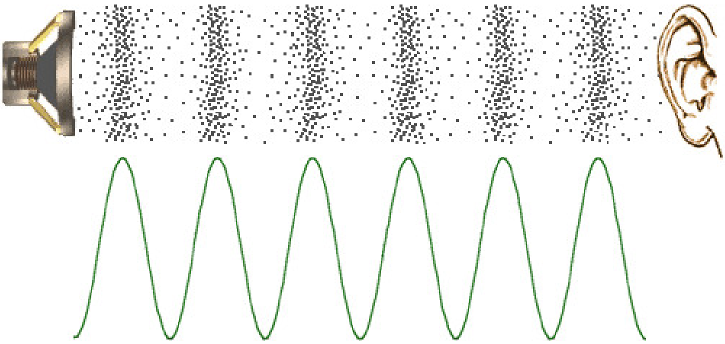
Chính vì trái đất quay quanh mặt trời mỗi năm một vòng, nên mỗi năm chúng ta lại có một dịp năm mới, một mùa xuân mới. Chuyển động của trái đất quanh mặt trời là một *chuyển động tuần hoàn*, với *chu kỳ* một năm (xấp xỉ 365 ngày), tức là cứ sau từng đó thời gian thì trái đất lại trở về vị trí cũ của nó trong hệ mặt trời.

Các chuyển động khác của các hành tinh trong hệ mặt trời, và của các thiên thể trong vũ trụ, cũng có tính tuần hoàn. Ví dụ, trái đất quay xung quanh nó với chu kỳ 24 giờ (nên chúng ta mới có ngày và đêm), mặt trăng quay xung quanh trái đất với chu kỳ hơn 27 ngày (nhưng bạn thử nghĩ xem vì sao một tháng mặt trăng có 30 ngày chứ không phải 27 ngày?!), và sao Mộc quay quanh mặt trời với chu kỳ gần 12 năm (mười hai năm con giáp trong âm lịch của chúng ta).



Trái đất quay quanh trục của nó, tạo ra ngày và đêm.

Không chỉ các thiên thể có chuyển động tuần hoàn, mà vô vàn các vật ngay xung quanh ta cũng chuyển động tuần hoàn với các chu kỳ khác nhau: đó là những chiếc bánh xe hay những chiếc đồng hồ, đó là âm thanh (ví dụ như nốt La trong âm nhạc tạo ra bởi chuyển động co giãn nhịp nhàng của không khí với chu kỳ 1/440 giây, tức là tần số 440Hz), đó là ánh sáng (ánh sáng bình thường mà chúng ta nhìn thấy có dải tần số từ 430 đến 777 THz; 1 THz $= 10^{12}$ Hertz), đó là sóng nước hình sin, đó là chuyển động bên trong của các phân tử và các nguyên tử, v.v. và v.v. Bản thân cơ thể của chúng ta cũng được tạo bởi các hệ có tính tuần hoàn. Xã hội loài người cũng có những chu kỳ tuần hoàn, như là chu kỳ kinh tế. Và thuyết luân hồi của đạo Phật cũng là một lý thuyết về sự tuần hoàn.



Không khí co giãn tuần hoàn tạo ra âm thanh.

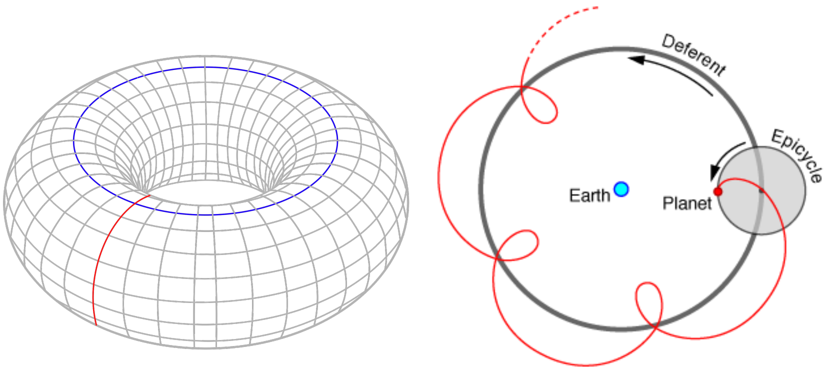
Nhưng tại sao thế giới lại tuần hoàn?

Câu trả lời dễ dãi là "Chúa tạo ra như thế". Nhưng để trả lời một cách sâu sắc và rõ ràng hơn, chúng ta sẽ cần đến khoa học toán-lý.

Từ Ptolemy đến Liouville

Khái niệm toán học dùng để mô tả quỹ đạo của chuyển động tuần hoàn gọi là *xuyến* (torus, tore). Xuyến 1 chiều chẳng qua là vòng tròn. Ví dụ như trái đất chạy quanh mặt trời theo một "vòng tròn" – về mặt hình học thì nó thực ra không tròn mà là một hình e-líp (ellipse), nhưng về mặt đại số và tô-pô thì e-líp cũng là xuyến. Xuyến nhiều chiều chẳng qua là tích của các xuyến một chiều (các vòng tròn). Xuyến hai chiều trông giống như là phao bơi hay là cái bánh donut.

Để mô tả một chuyển động tuần hoàn đơn giản, chỉ cần xuyến một chiều là đủ, nhưng với các chuyển động phức tạp hơn, cần có xuyến nhiều chiều mới mô tả được, mỗi chiều biểu thị một "thành phần đơn giản" của chuyển động. Điều này đã được nhà toán học và thiên văn học Ptolemy (100-170 sau CN) biết đến từ thời xa xưa.



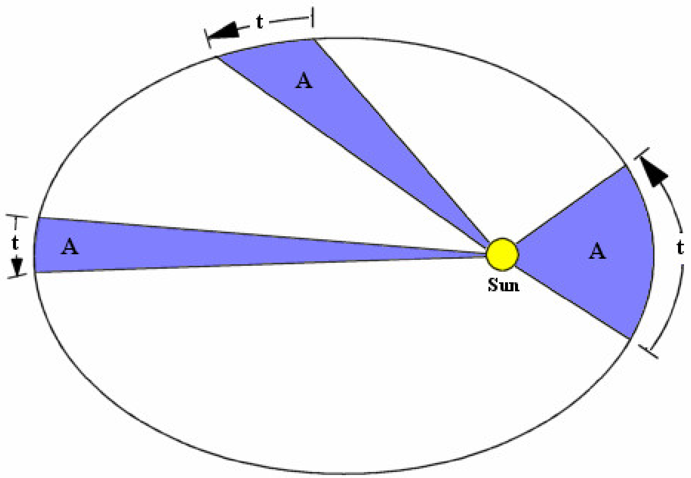
Xuyến 2 chiều, và mô hình của Ptolemy về chuyển động của các hành tinh.

Để giải thích hiện tượng thỉnh thoảng "đi giật lùi" (retrograde) của các hành tinh trên bầu trời, Ptolemy đã mô tả chuyển động của một hành tinh như là một điểm được gắn vào một cái "đĩa xoay" (epicycle) và có tâm đĩa chuyển động trên một vòng tròn quay quanh trái đất. Ta có thể hình dung chuyển động này như một chuyển động đều đặn trên một cái xuyến hai chiều: một chiều là quay vòng quanh trái đất, còn một chiều là quay vòng quanh tâm của "epicycle".

Mô hình của Ptolemy lấy Trái Đất làm trung tâm bất động, do đó bị phê phán là sai lầm về mặt vật lý, vì tất nhiên chính Mặt Trời mới là trung tâm của Hệ Mặt Trời. Tuy nhiên, về mặt phương pháp toán học, người ta có quyền thay đổi các hệ tọa độ, lấy bất cứ điểm nào trong không gian làm điểm gốc nếu điều đó tiện lợi cho quan sát và tính toán. Từ quan điểm toán học đó thì mô hình của Ptolemy thực ra là một mô hình rất tốt, cho các kết quả khá chính xác.

Sau Ptolemy xuất hiện rất nhiều các nhà thiên văn học khác, trong đó không thể không nhắc tới Johannes Kepler (1571-1630), người cùng thời với Galilei, và ba định luật nổi tiếng do ông tìm ra, dựa trên các quan sát thiên văn rất chính xác của người thầy của ông, nhà thiên văn học Tycho Brahe (1546-1601). Định luật thứ hai của Kepler phát biểu như sau: Đoạn thẳng nối từ hành tinh đến Mặt Trời luôn quét được những miền có diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau, hay nói cách khác, tốc độ quét diện tích của nó là *bất biến theo thời gian*.

Trong định luật thứ hai này của Kepler, ta thấy xuất hiện khái niệm *hàm bất biến* (invariant function) của một hệ chuyển động (gọi là *hệ động lực* trong toán học): hàm bất biến là hàm trên không gian tất cả các trạng thái giả định có thể có của hệ, nhưng giá trị của nó không thay đổi theo thời gian khi hệ chuyển động. Những hàm bất biến này (hay còn gọi là *tích phân thứ nhất* – first integral) đóng vai trò rất quan trọng trong cơ học và vật lý hiện đại.



Định luật thứ hai của Kepler.

Sau Kepler đến Newton (1942–1627) với *định luật vạn vật hấp dẫn* và *giải tích toán học* (phép tính vi-tích phân, cùng với Leibniz), làm thay đổi toàn bộ bộ mặt của khoa học. Phương pháp giải tích đã cho phép các nhà khoa học thế kỷ 18-19 như Lagrange và Laplace tính toán và dự đoán chính xác chuyển động của các hành tinh (trong đó có cả Mặt Trăng là vệ tinh của trái đất) và dự đoán sự tuần hoàn và ổn định của Hệ Mặt Trời ít ra là trong vòng hàng triệu năm tới. Thậm chí, họ còn tính ra được những hành tinh mà sau đó mới quan sát kiểm chứng được trên bầu trời, như là trường hợp của Le Verrier với Hải Vương Tinh (Neptune) vào năm 1846.

Một chi tiết toán học: trong một hệ có nhiều thành phần tuần hoàn (ví dụ như Hệ Mặt Trời của chúng ta), các chu kỳ của các thành phần khác nhau nói chung là khác nhau (khi một hành tinh này trở về vị trí cũ của nó thì các hành tinh khác còn đang mải chạy đi đâu đó), và như vậy nói chung không tìm được thời điểm nào mà toàn bộ hệ, tức là *tất cả các thành phần*, đều quay lại chính xác đúng vị trí ban đầu của nó. Thuật ngữ toán học để gọi một hệ như vậy là hệ *quasi-periodic* (*tựa tuần hoàn*).

Nhà toán học Joseph Liouville (1809-1882) chính là người đầu tiên đưa ra một định lý tổng quát giải thích sự tuần hoàn của các hệ. Trong một bài báo năm 1855[1], Liouville đã chỉ ra rằng, nếu một hệ động lực thỏa mãn một số điều kiện tự nhiên nào đó, mà ngày nay người ta gọi là điều kiện *khả tích* (theo nghĩa Liouville), liên quan đến sự tồn tại của các tích phân thứ nhất (tức là các đại lượng bất biến, như đã nói ở trên), thì dáng điệu của hệ là tựa tuần hoàn:

Nếu hệ khả tích có n chiều tự do, thì với mỗi trạng thái ban đầu nó sẽ chuyển động trên một cái xuyến n chiều, tuần hoàn theo từng chiều.

Định lý trên của Liouville, cùng với một định lý về xấp xỉ các hàm tựa tuần hoàn gọi là *định lý Hipparchus-Ptolemy-Fourier*[2], ta thu được cách biểu diễn sau cho các quỹ đạo của các hệ khả tích:

Các tọa độ của một quỹ đạo của một hệ khả tích có thể được biểu diễn, với độ chính xác tùy ý và cho mọi thời gian t, bằng các hàm số dạng $\sum_{i=1}^{n} a_i \sin(\omega_i t + b_i)$.

Người ta thường biết đến Liouville như một nhà toán học lý thuyết với các định lý trong giải tích phức và số siêu việt, và với tư cách người sáng lập một trong những tạp chí toán học uy tín nhất của Pháp, tạp chí "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées", vẫn còn hoạt động đến ngày nay. Ngoài ra, Liouville còn được biết đến như là người đã có công đem công trình của Galois từ trong tối ra

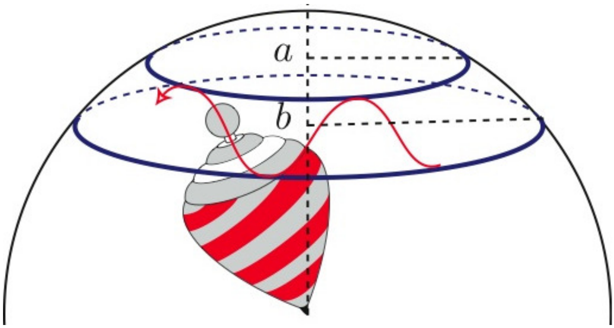
[1]Xem: `http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1855_1_20_A11_0.pdf`

[2]Hipparchus (190-120 TCN) là nhà toán học và thiên văn học cổ Hy Lạp, người được coi là cha đẻ của môn lượng giác. Joseph Fourier (1768-1830) là nhà toán học Pháp, người có tên tuổi gắn liền với các *chuỗi Fourier* (chuỗi lượng giác).

sáng[1]. Ít ai biết rằng Liouville cũng là một nhà toán học ứng dụng và vật lý học tài năng, và định lý Liouville phát biểu phía trên chính là một trong những định luật cơ bản nhất trong khoa học tự nhiên, sánh ngang định luật Kepler về ý nghĩa.

Các góc và các động lượng

Trong điện thoại di động ngày nay có những "con quay", gọi là "gyroscope", dùng để định hướng. Bản thân Trái Đất cũng là một "con quay", quay quanh tâm của nó. Một ví dụ khác chính là những con quay mà trẻ em hay chơi, đối xứng trục và quay trên một điểm nằm trên trục đối xứng, và được gọi là *con quay Lagrange* trong cơ học.



Chuyển động tựa tuần hoàn của con quay Lagrange.

Khi xét chuyển động của một con quay như trên hình vẽ, ta thấy nó có ba thành phần (ba chiều tự do): chuyển động quay xung quanh trục của nó (*rotation*); bản thân trục của nó quay xung quanh đường thẳng đứng đi qua điểm cố định (*precession*), và sự lắc lư lên xuống

[1]Về điểm này, xem sách "Thiên tài và số phận – Chuyện kể về các nhà toán học", Tủ sách Sputnik, số 035.

cao thấp của trục của nó (*nutation*). Chuyển động quay của trái đất quanh tâm của nó cũng có ba thành phần như vậy: tuy người ta thường chỉ nói đến thành phần *rotation* (quay quanh trục), nhưng các thành phần khác, đặc biệt là *precession* với chu kỳ những 26 ngàn năm, cũng rất quan trọng: nó giải thích vì sao sau 2 ngàn năm, các chòm sao lại bị chạy lệch đi một cung trên vòng Hoàng đạo, gây ra sự mâu thuẫn giữa các trường phái chiêm tinh Ấn Độ và phương Tây.

Bỏ qua chuyện chiêm tinh đó, các đại lượng biểu thị *rotation*, *precession* và *nutation* được gọi là các *tọa độ góc*. (Đối với *nutation* thì phải hiểu từ *góc* theo nghĩa tổng quát hóa). Một hệ tựa tuần hoàn trên xuyến n chiều thì có đúng n tọa độ góc. Nhưng đó là khi ta đã cố định các đại lượng bất biến của nó (như là năng lượng, moment góc, v.v.). Khi chưa cố định các đại lượng bất biến đó, thì để mô tả đầy đủ hệ Hamilton khả tích ta cần thêm n tọa độ nữa, *đối ngẫu* với các tọa độ góc theo một nghĩa tự nhiên nào đó, và gọi là các *động lượng* (action functions).

Sự tồn tại của các *hệ tọa độ góc-động lượng* (action-angle variables) mới chỉ được chứng minh vào năm 1935 bởi nhà toán học và vật lý vũ trụ Henri Mineur[1], nhưng ứng dụng của nó thì đã được biết đến ngay từ trước đó, đặc biệt là trong cơ học lượng tử. Đối với các hệ lượng tử nhỏ li ti, thì các tọa độ góc chính là các pha của các hàm sóng biểu thị trạng thái của hệ – không thể đo được các pha này, tuy rằng chúng tồn tại, vì chúng thay đổi quá nhanh. Các động lượng là những thứ đo được, và ứng với những *số lượng tử* (quantum numbers). Vào năm 1917, Albert Einstein đã đưa ra một quy tắc *lượng tử hóa* (để chuyển từ mô hình cổ điển sang mô hình lượng tử của vật

[1]Xem: `https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Mineur`. Có một hố (crater) trên Mặt Trăng được đặt tên Mineur.

chất) sử dụng các hệ tọa độ góc-động lượng, dựa trên các nghiên cứu trước đó của các nhà vật lý như Bohr, Sommerfeld và Epstein.[1]

Không chỉ quan trọng cho việc lượng tử hóa, mà các hệ tọa độ góc-động lượng còn rất quan trọng trong việc nghiên cứu một cách hệ thống sự ổn định và dáng điệu tựa tuần hoàn của các hệ khả tích khi bị *nhiễu* (perturbations). Lý thuyết này khởi nguồn từ Andrei Kolmogorov (1903-1987) từ giữa thế kỷ 20, với sự tham gia của nhiều nhà khoa học khác, đặc biệt là Vladimir Arnold (1937-2010) và Jurgen Moser (1928-1999), nên được biết đến với tên gọi *lý thuyết KAM*, và vẫn đang được tiếp tục phát triển ngày nay. Kết quả chính của lý thuyết này là:

Một hệ khả tích khi bị nhiễu và không còn khả tích trên toàn bộ không gian các trạng thái giả tưởng nữa, thì vẫn có chuyển động tựa tuần hoàn trên một phần rất lớn của không gian đó.

Kể cả khi mà hệ khả tích bị nhiễu "không may mắn", rơi vào vùng không còn tựa tuần hoàn, thì nó vẫn chuyển động với dáng điệu như là tựa tuần hoàn trong một thời gian dài (lý thuyết Nekhoroshev). Đối với chúng ta, điều đó có nghĩa là, tuy các nhà thiên văn học như Jacques Laskar[2] đã chỉ ra rằng Hệ Mặt Trời thực ra có nhiều nhiễu loạn trong đó, và đến một ngày nào đó sẽ bị phá hủy, nhưng dáng điệu tựa tuần hoàn của nó, như chúng ta đang nhìn thấy, sẽ còn kéo dài cả tỷ năm nữa.

Những chứng minh toán học đầu tiên của định lý về hệ tọa độ góc-động lượng khá là phức tạp. Nhưng gần đây có một cách tiếp cận mới, khá đơn giản đồng thời áp dụng được cho nhiều tình huống

[1] Xem: `http://hermes.ffn.ub.es/luisnavarro/publicaciones_archivos/Einstein's_rule_(2000).pdf`

[2] Xem: `https://en.wikipedia.org/wiki/Jacques_Laskar`

khác, dựa trên định luật bảo toàn sau đây:

Bất kỳ tensor nào được một hệ động lực bảo toàn, thì cũng được bảo toàn bởi các tác động xuyến Liouville của nó.

Trong trường hợp mà hệ khả tích theo nghĩa Liouville, thì tác động xuyến Liouville chính là việc quay các tọa độ góc. Nhưng đối với các hệ tổng quát hơn, không nhất thiết phải là Hamilton, không nhất thiết phải khả tích, hoặc là ở tại các chỗ có kỳ dị (ví dụ như là các điểm cân bằng không ổn định), vẫn định nghĩa được các tác động xuyến Liouville này (tuy có thể với số chiều nhỏ hơn số chiều tự do của hệ), và định luật trên vẫn đúng, vẫn cho ra các tọa độ góc-động lượng theo nghĩa mở rộng.[1]

Thế giới trở nên hỗn độn

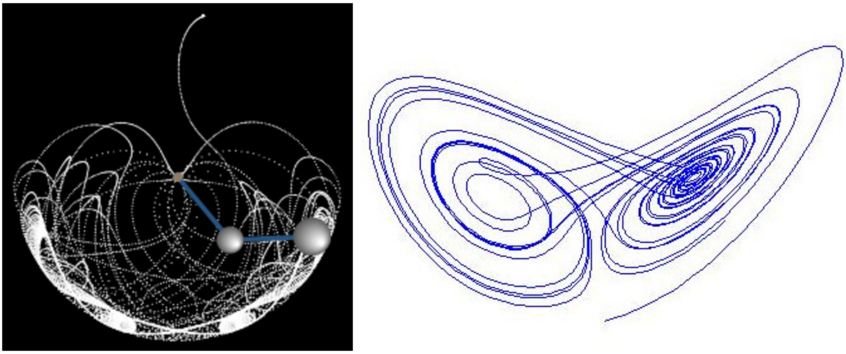
Cho đến cuối thế kỷ 19, các hệ động lực được nghiên cứu trong vật lý và trong thiên văn học nói chung đều *khả tích*, hoặc ít ra có thể được coi là các hệ khả tích cộng thêm một chút tác động gây nhiễu, và người ta tính được nghiệm của chúng. *Thế giới là tựa tuần hoàn*.

Tình hình bắt đầu đảo lộn kể từ khi xuất hiện công trình của Henri Poincaré (1854-1912), người được hậu thế mệnh danh là *nhà khoa học toàn năng cuối cùng*, vào năm 1890, về *vấn đề ba vật thể* (problème de trois corps). Hệ mặt trời của chúng ta có nhiều hơn ba vật thể, nhưng có một vật thể "làm vua" chế ngự hoàn toàn các vật thể còn lại. Bây giờ hình dung là ta có ba vật thể trở lên, nhưng "không có vua", không vật thể nào chiếm thế áp đảo trong đó, thì hệ như vậy còn khả tích không? Câu trả lời của Poincaté là *không khả*

[1]Xem: `https://arxiv.org/abs/1706.08859`

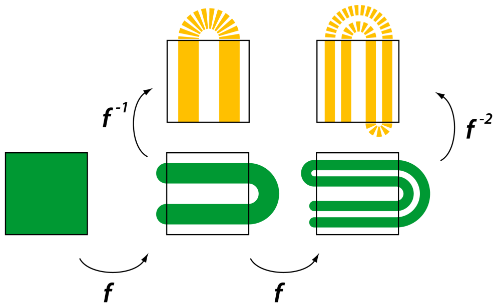
tích. Không tính được nghiệm cho thời gian dài. *Thế giới không còn tuần hoàn nữa, mà trở nên hỗn độn*!

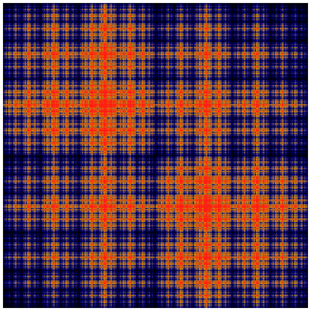
Trong thế kẻ 20, việc nghiên cứu các hệ hỗn độn trở thành "mốt" đối với các nhà toán học và vật lý. Người ta nhận ra rằng, không chỉ các hệ phức tạp với rất nhiều biến, như là chuyển động của không khí, chứa đựng nhiều hỗn độn (thỉnh thoảng máy bay đang bay mà rơi vào vùng "nhiễu loạn" (turbulence) thì là một biểu hiện của sự hỗn độn đó), mà ngay các chuyển động đơn giản, với chỉ có hai hay ba chiều tự do, cũng có thể hỗn độn, ví dụ như con lắc hai khúc (double pendulum) hay *con bướm của Lorenz* (một mô hình chuyển động 3 chiều quy tụ về một khối trông giống như con bướm, mà ở đó chuyển động chạy đi chạy lại giữa hai cánh bướm một cách như là ngẫu nhiên không lường trước được).



Con lắc hai khúc và con bướm của Lorenz.

Có một điểm quan trọng ở đây là, các hệ động lực hoàn toàn *định tính* (tức là quỹ đạo được xác định duy nhất theo điều kiện ban đầu) cũng chứa đựng trong đó sự hỗn độn như là các hệ ngẫu nhiên. Lý do cơ bản nhất dẫn đến sự hỗn độn, như các nhà toán học phát hiện ra, là *tính hyperbolic* của hệ (tức là hệ co vào theo hướng này lại dãn ra theo hướng khác, dẫn đến chuyện nhạy cảm với điều kiện ban đầu, hay như người ta thường gọi là “sai một li đi một dặm” hay “hiệu ứng con bướm”). Nhà toán học Stephen Smale (sinh năm 1930) có đưa ra một mô hình hệ hyperbolic hai chiều rất đơn giản, được mọi người gọi là *vó ngựa của Smale* (Smale’s horseshoe) cho thấy một hệ như thế có thể chứa bên trong nó một hệ hoàn toàn ngẫu nhiên kiểu *dịch chuyển Bernoulli* (Bernoulli shift): ở mỗi thời điểm trạng thái là 0 hoặc 1, và dịch chuyển sang 0 hoặc 1 ở thời điểm tiếp theo một cách hoàn toàn ngẫu nhiên.





Vó ngựa của Smale (bên trái), và một tập Cantor các điểm trong vó ngựa mà ở đó chuyển động nhảy loạn như là dịch chuyển Bernoulli.

Tính hyperbolic (tức là tính nhạy cảm với điều kiện ban đầu) của các hệ động lực không khả tích cũng chính là lý do tại sao dự đoán thời tiết trước một tuần là công việc vô cùng khó, kể cả ngày nay khi người ta đã có các máy tính siêu cao tốc tại các trung tâm dự đoán khí tượng thủy văn và các điểm đo đạc ở khắp nơi. Thông tin đo đạc ngày hôm nay chỉ cần sai số chút xíu, hay là mô hình sử dụng chỉ cần thiếu chính xác chút xíu, thì sau một ngày sự sai số đã đã được phóng đại lên nhiều lần do tính nhạy cảm của hệ, và sau một tuần thì sự sai số đó có thể trở nên lớn đến mức mưa biến thành nắng.

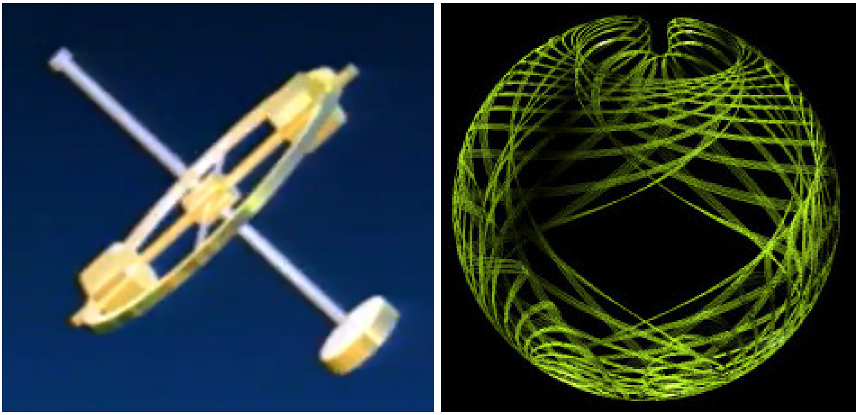
Nói cách khác, sự hỗn độn có thể hiểu là sự mất mát thông tin nhanh chóng. Ý tưởng này đã đưa nhà toán học Kolmogorov (của lý thuyết KAM) đến khái niệm *entropy của hệ động lực*, ngày nay hay được gọi là *Kolmogorov-Sinai entropy*[1], như là một thước đo về độ mất thông tin của nó, cũng chính là một thước đo về độ hỗn độn của nó. Công thức của entropy này tương tự như công thức entropy của Boltzmann trong vật lý và công thức entropy của Shannon trong tin học, chỉ khác là có thêm yếu tố thời gian. Mọi người có thể đoán rằng, các hệ tựa tuần hoàn thì có entropy bằng 0, còn các hệ hỗn độn có entropy dương.

Một điều thú vị là, khi một hệ phức tạp nhiều thành phần *hoàn toàn hỗn độn*, xáo trộn đến mức mọi thông tin về trạng thái chính xác của nó tại một mốc thời gian chẳng có ý nghĩa gì hết cho các thời gian sau đó, thì nó trở thành *hệ ergodic*, một khái niệm rất quan trọng khác trong toán học và vật lý. Ví dụ như không khí trong căn phòng của chúng ta được coi là hệ ergodic, vì chúng ta chẳng thể biết được từng phân tử không khí riêng lẻ sẽ nằm ở đâu vào lúc nào. Đối với các hệ ergodic này, thì ở mức độ micro (từng thành phần nhỏ tẹo một) các thông tin về trạng thái chẳng có ý nghĩa gì, nhưng ở mức độ macro (những thông tin về tổng thể, như là nhiệt độ, áp suất, v.v.) thì vẫn hoàn toàn có ý nghĩa, và khi ta chỉ xét các biến macro thôi, thì có thể ta lại được một hệ khả tích.

[1] Jacob Sinai (sinh năm 1935) là một nhà toán học nổi tiếng, học trò của Kolmogorov, xem: `https://en.wikipedia.org/wiki/Yakov_Sinai`.

Mò kim đáy biển

Kể từ khi xuất hiện công trình của Poincaré về sự không khả tích, người ta bỗng nhận ra rằng, trong "biển cả mênh mông" của các hệ động lực trừu tượng với các tham số nào đó (như là khối lượng và hình thù của các vật thể), các hệ khả tích là *vô cùng hiếm hoi*, tìm các tham số sao cho hệ khả tích khó ngang với mò kim đáy biển. Cần có những phương pháp thăm dò, sàng lọc, để loại đi các giá trị của tham số dẫn tới hệ không khả tích, chỉ giữ lại một ít giá trị có thể cho hệ khả tích thôi, rồi kiểm tra tiếp xem chúng có khả tích thật hay không. Một phương pháp thăm dò như vậy, dựa trên việc phân tích các điểm kỳ dị, đã được nhà toán học Sofia Kovalevskaya (1850-1891) sử dụng để tìm ra một con quay nổi tiếng mang tên bà, khả tích nhưng có dáng điệu khá đặc biệt và phức tạp.[1]



Mô hình con quay Kovalevskaya, và một quỹ đạo tựa tuần hoàn của nó.

[1] Xem video do nhà toán học Holger Righter làm về con quay này: `https://av.tib.eu/media/10361`

Trong thế kỷ 20 và 21, nhiều nhà toán học và vật lý quan tâm đến việc kiểm tra xem các hệ động lực có khả tích hay không, và phát triển các công cụ mới, dựa trên cả tô-pô, hình học, đại số và giải tích, cho công việc đó. Người ta không còn ngạc nhiên lắm khi thấy hầu hết các hệ có từ hai chiều tự do trở lên là không khả tích (nếu chỉ có một chiều thôi thì đủ đơn giản để mà luôn luôn khả tích). Nhưng thỉnh thoảng người ta cũng tìm ra thêm những hệ khả tích thú vị mới.

Một trong những công cụ mạnh nhất ngày nay để khảo sát tính khả tích của các hệ là *lý thuyết Galois vi phân*, tương tự như lý thuyết mà Galois đã nghĩ ra từ đầu thế kỷ 19 về mở rộng trường đại số, nhưng áp dụng cho các phương trình vi phân. Sử dụng lý thuyết này, hai nhà toán học Jean-Pierre Ramis (Viện sĩ Hàn Lâm của Pháp) và Juan Morales-Ruiz (Giáo sư ở Madrid) đã tìm ra một điều kiện cần cho sự khả tích của *hệ Hamilton* dựa trên các phương trình biến phân bậc nhất của chúng vào thập kỷ 1990. Sang đến thập kỷ 2000-2010, kết quả này được họ mở rộng ra, cùng với một nhà toán học khác tên là Carl Simo (Giáo sư ở Barcelona) cho các phương trình biến phân bậc cao hơn, rồi được tác giả bài viết này và một nghiên cứu sinh của mình tên là Michael Ayoul mở rộng ra cho trường hợp hệ động lực bất kỳ, không nhất thiết phải là hệ Hamilton:

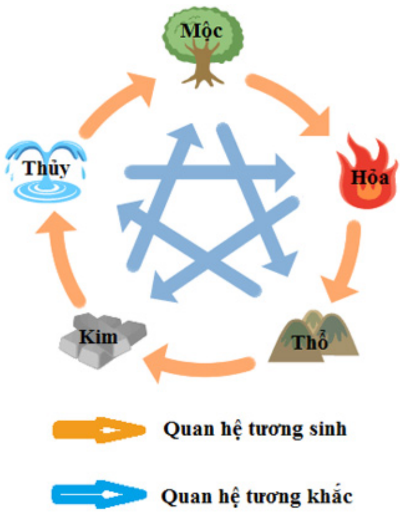
Nếu một hệ động lực là khả tích (với các hàm đều là meromorphic) thì mọi nhóm Galois vi phân của phương trình biến phân bậc bất kỳ của mọi nghiệm của nó đều là tựa giao hoán (essentially Abelian).

Tiêu chuẩn khả tích trên đã và đang được các nhà nghiên cứu áp dụng để chứng minh sự *không khả tích* của hàng loạt các hệ động lực, và dò tìm các trường hợp *khả tích*.

Gặp lại thuyết ngũ hành

Có vẻ như có một nghịch lý, một mâu thuẫn lớn giữa các lý thuyết kể từ thời Poincaré và thực tế: về mặt lý thuyết thì hầu như chẳng có hệ nào là khả tích, hỗn độn phải ngự trị ở khắp nơi. Nhưng trên thực tế thì trong thế giới của chúng ta và trong cuộc sống hàng ngày, ta bắt gặp nhiều chuyển động tựa tuần hoàn hơn là hỗn độn. Kể cả thứ "hỗn độn nhất" như là thị trường chứng khoán cũng không thoát khỏi quy luật của chu kỳ lên xuống, và mọi bong bóng (như tulipomania ngày xưa hay bitcoinomania ngày nay) đều sẽ vỡ theo quy luật tuần hoàn này. Vậy "sai" ở đâu?

Trước khi đưa ra câu trả lời, chúng ta thử tìm lại thuyết ngũ hành.



Các thuyết âm-dương và ngũ hành đã ăn sâu vào các nền văn hóa phương Đông, đến mức rất nhiều người tin vào nó mà không cần hiểu, tựa như là tôn giáo vậy. Một số triết gia thì phản bác lại rằng thuyết ngũ hành là ngớ ngẩn, bởi vì, như chúng ta biết, thế giới được tạo nên từ hơn 100 nguyên tố khác nhau, chứ đâu phải là từ năm thứ đất - nước - lửa - gỗ - kim loại? Tất nhiên, nếu hiểu theo nghĩa đen như vậy thì thật là ngô nghê. Nhưng thuyết ngũ hành có lẽ không ngô nghê đến thế. Vậy thì, *thuyết ngũ hành thực ra là cái gì?*

Với các kiến thức toán học ngày nay, chúng ta có thể nhận ra rằng, *thuyết ngũ hành chính là một lý thuyết về động lực học*, nhằm mô tả và giải thích mọi quá trình thay đổi trên thế giới, từ thời xa xưa khi mà toán học còn chưa phát triển. Các *hành* không phải là các nguyên tố hóa học, mà là các *trạng thái cơ sở* của hệ động lực, cụ thể là:

- *Kim = recurrent*, lặp đi lặp lại, ổn định bền vững như thép.

- *Thủy = transport*, đi về một hướng, như nước trôi theo dòng.

- *Mộc = expansion*, phát triển mở rộng, như cái cây lớn lên.

- *Hỏa = hyperbolic*, phát tán năng lượng và hỗn độn như lửa.

- *Thổ = contraction*, co lại chắc như là đất đá.

Để thấy sự liên quan giữa các *hành* nói trên với các hệ động lực tổng quát, chúng ta có thể nhắc tới một định lý của nhà toán học Charles Conley (1933-1984), được gọi là *định lý cơ bản của hệ động lực* (the fundamental theorem of dynamical systems)[1].

Mọi hệ động lực trên không gian "khép kín" (compact) đều tách được thành hai phần: phần "quay đi quay lại" (chain-recurrent) và phần "đi theo một hướng" (gradient-like).

Trong định lý của Conley có mỗi hai *hành*, thế còn ba *hành* khác đi đâu? Mấu chốt nằm ở từ "khép kín". Nếu hệ mở ra, có tương tác với bên ngoài (hay là chỉ xét một bộ phận của hệ), ta sẽ thấy phải chia nó thành năm phần, ứng đúng với ngũ hành, thay vì chỉ có hai phần (bạn đọc có thể tự nghĩ xem phần nào ứng với *hành* nào):

- Phần quay đi quay lại bên trong hệ.

- Phần đi theo một hướng nhưng nằm bên trong hệ.

- Phần đi từ ngoài vào bên trong và nằm lại bên trong hệ.

[1] Xem: http://www.emis.ams.org/journals/CMUC/pdf/cmuc9503/norton.pdf

- Phần đi từ bên trong ra ngoài hệ.

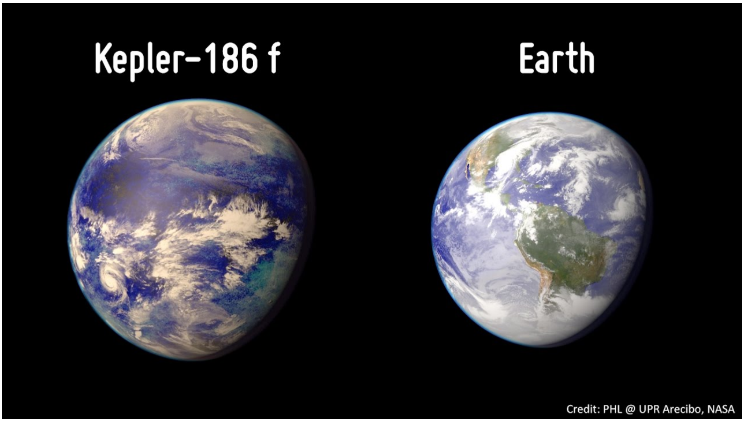
- Phần đi ngang qua hệ, từ ngoài vào trong rồi lại ra ngoài.

Có một tương ứng đơn giản khác giữa năm *hành* với năm trường hợp của hệ động lực đơn giản cho bởi phép biến đổi tuyến tính dạng $T(x) = A.x + b$, trong đó x là một miền nhỏ trên mặt phẳng, A là một ma trận 2×2 và b là một vec-tơ hai chiều. Khi $b \neq 0$ ta thấy có sự di chuyển của miền theo hướng b (Thủy). Khi $b = 0$, ta phân loại tiếp: nếu hai giá trị riêng của A đều có chuẩn bằng 1 thì đây là biến đối kiểu quay vòng (Kim). Nếu cả hai giá trị riêng đều có chuẩn lớn hơn 1 thì miền mở rộng ra (Mộc), Nếu cả hai giá trị riêng đều có chuẩn nhỏ hơn 1 thì miền co lại (Thổ), còn nếu một giá trị riêng nhỏ hơn 1 và một giá trị riêng lớn hơn 1 thì miền biến dạng, to lên theo một hướng nhưng nhỏ lại theo hướng khác (Hỏa).

Thuyết ngũ hành không chỉ nói về việc tách hệ động lực thành năm thành phần (trạng thái) cơ bản, mà còn nói về sự chuyển đổi giữa các trạng thái, theo vòng tương sinh và tương khắc. Các vòng sinh khắc này có thể quan sát thấy trong tự nhiên, và cũng có thể áp dụng vào cuộc sống của chúng ta. Ví dụ như trong sự phát triển của vũ trụ, có những lúc vật chất văng ra tứ tung (Hỏa), rồi chúng lại co tụm dần vào với nhau để tạo thành Trái đất (Thổ) và các hành tinh khác, tức là Hỏa sinh Thổ. Bánh xe quay tròn cho xe lăn đi, hay mũi khoan quay trò để xuyên thủng vật, là ví dụ của Kim sinh Thủy.

Các vòng tuần hoàn đóng vai trò đặc biệt quan trọng trong thuyết ngũ hành: không chỉ một trong năm hành (hành Kim) đại diện cho các chuyển động có tính quay vòng, mà bản thân các còng tương sinh và tương khắc cũng là những vòng tuần hoàn.

Cuối cùng thì vì sao thế giới lại tuần hoàn?



Biết đâu trên hành tinh Kepler-186f cũng có những sinh vật đang nghĩ về sự tuần hoàn của thế giới?

Không có một câu trả lời duy nhất cho câu hỏi này, nhưng có thể đưa ra một số lý do khiến cho chúng ta thấy thế giới tuần hoàn.

- Lý do thứ nhất là *tính ổn định rất cao của các hệ tuần hoàn* so với các hệ hỗn độn, như là lý thuyết KAM đã chỉ ra. Dù rằng các hệ hỗn độn có thể xuất hiện rất nhiều lần hơn so với các hệ tuần hoàn, nhưng chúng tan rã nhanh chóng, trong khi các hệ tuần hoàn tuy ít xuất hiện hơn nhưng lại trường tồn đến bây giờ.

- Lý do thứ hai, cũng tương tự lý do thứ nhất, là *quy luật chọn lọc tự nhiên*. Quy luật của Darwin không chỉ đúng với động vật, mà còn đúng với cả các vật chất vô tri vô giác. Những gì có khả năng sinh tồn cao, tức là tính ổn định cao thì còn lại, và những cấu trúc tuần hoàn thuộc loại có khả năng sinh tồn cao nhất.

- Lý do thứ ba là, có thể Tạo Hóa sinh ra vô vàn các thế giới khác nhau, nhưng *chúng ta may mắn* lọt vào một thế giới có tính ổn định cao, nếu không thì bản thân chúng ta đã chẳng tồn tại để mà triết lý về thế giới tuần hoàn. Với sự khám phá ra những hành tinh khác nằm ngoài hệ mặt trời nhưng có các tính chất tốt đẹp tương tự trái đất, như là hành tinh Kepler-186f nằm cách chúng ta 500 năm ánh sáng, hoàn toàn có thể là có những nền văn minh khác nhận thấy thế giới tuần hoàn và đặt câu hỏi tại sao.

- Một lý do nữa là, thuyết ngũ hành, áp dụng được vào mọi thế giới chứ không riêng gì thế giới của chúng ta, cho thấy *sự luân hồi luôn là một trong năm yếu tố động lực cơ bản của mọi thế giới*. Tất nhiên, ngoài ra còn có các yếu tố khác. Hơn nữa, nếu ta đi theo một vòng tương sinh, từ Kim đến Thủy đến Mộc đến Hỏa đến Thổ rồi quay về Kim, thì Kim mới này không hẳn là Kim cũ mà có dịch chuyển đi, một sự dịch chuyển của Thủy. Cũng tựa như các nốt nhạc vậy, từ nốt Đô đi một vòng qua Rê, Mi... rồi lại về Đô, nhưng là nốt Đô mới ở cung bậc khác. Trong sự tuần hoàn có sự chuyển đổi, và trong sự chuyển đổi có sự tuần hoàn.

Thế giới tuần hoàn đang mang đến cho chúng ta một mùa xuân mới, tựa như các mùa xuân trước, nhưng hy vọng sẽ tươi vui hơn các mùa xuân trước. Xin chúc các bạn một mùa xuân 2018 hạnh phúc!